

Mitschrift zur Vorlesung am 1.12.2000

Definiton D

Sei $\tau = (S, X, \Gamma, \delta, s_0, b)$ eine Turing-Maschine.

Die von τ berechnete Funktion $h_\tau : X^* \rightarrow \Gamma^*$

Ist definiert durch

$$h_\tau(w) = \begin{cases} \omega(\delta^{n+1}(s, \alpha(w))) & \text{falls } m = \min \{j \mid \delta^j(s, \alpha(w)) = (s, f, i) \text{ und} \\ & \delta(s, f(i)) = (s', a', h)\} \text{ existiert} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition E

Seien A und B Alphabete

- Eine Abbildung $h = A^* \rightarrow B^*$ (partielle Funktion) heißt Turing-berechenbar, wenn es eine TM gibt $\tau = (X, S, \Gamma, \delta, s_0, b)$ gibt mit $B \subseteq \Gamma$ und $h_\tau = h$
- $\tau_{A,B} = \{ h \mid h : A^* \rightarrow B^* \text{ Turing-berechenbar} \}$
- τ sei die Klasse aller Turing-berechenbarer Funktionen (A,B beliebig)
- Eine Menge $M \subseteq A^*$ heißt Haltebereich/Definitionsbereich einer Turingmaschine $\tau = (S, A, \Gamma, \delta, s_0, b)$, wenn $M = \{ w \in A^* \mid h_\tau(w) \text{ definiert} \}$
- Eine Menge $M \subseteq B^*$ heißt Ergebnis/Wertebereich einer TM $\tau = (S, A, \Gamma, \delta, s_0, b)$ mit $B \subseteq \Gamma$ wenn $M = \{ v \in B^* \mid \exists w \in A^* : h_\tau(w) = v \}$

Beispiele

- $\tau_1 = (\{s_0\}, \{\mid\}, \{b, \mid\}, \delta_1, s_0, b)$ (Successor-Maschine)
mit $\delta(s_0, b) = (s_0, \mid, h)$
 $\delta(s_0, \mid) = (s_0, \mid, r)$

Tabelle

S	Γ	S	Γ	-
s_0	$\mid$	s_0	$\mid$	r
s_0	b	s_0	$\mid$	h

$$h_{\tau_1} : \{\mid\}^* \rightarrow \{b, \mid\}^*$$

$$h_{\tau_1} : \{\mid^n\} = \mid^{n+1}$$

Haltebereich = $\{\mid\}^*$
 Ergebnisbereich = $\{\mid\}^+$

2) $\tau_2 = (\{s_0\}, \{\mid\}, \{b, \mid\}, \delta_2, s_0, b)$ (Nullfunktion)

Tabelle

S	Γ	S	Γ	-
s_0	b	s_0	b	h
s_0	$\mid$	s_0	b	r

$h_{\tau_2}(w) = \varepsilon, w \in \{\mid\}^*$

Haltebereich = $\{\mid\}^*$
 Ergebnisbereich = $\{\varepsilon\}$

3) $\tau_3 = (\{s_0, s_1\}, \{\mid\}, \{b, \mid\}, \delta_3, s_0, b)$ („Geradzahligkeitsmaschine“)

Tabelle

S	Γ	S	Γ	-
s_0	b	s_1	$\mid$	h
s_0	$\mid$	s_1	$\mid$	r
s_1	b	s_1	b	r
s_1	$\mid$	s_0	$\mid$	r

$h_{\tau_3}(|^n) = \begin{cases} |^{n+1}, & \text{falls } n \text{ durch zwei teilbar ist} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$

Haltebereich = $\{|^{2k} \mid k \in \mathbb{N}_0\}$
 Ergebnisbereich = $\{|^{2k+1} \mid k \in \mathbb{N}_0\}$

4) $\tau_4 = (\{s_0, s_1, s_2, s_3\}, \{\mid\}, \{\mid, c, b\}, \delta_4, s_0, b)$

S	Γ	S	Γ	-
---	----------	---	----------	---

s ₀	b	s ₀	b	h
s ₀		s ₁	b	r
s ₀	c	s ₀	c	h
s ₁	b	s ₂	c	r
s ₁		s ₁		r
s ₁	c	s ₁	c	r
s ₂	b	s ₃	c	l
s ₂		s ₂		h
s ₂	c	s ₂	c	h
s ₃	b	s ₀	b	r
s ₃		s ₃		l
s ₃	c	s ₃	c	l

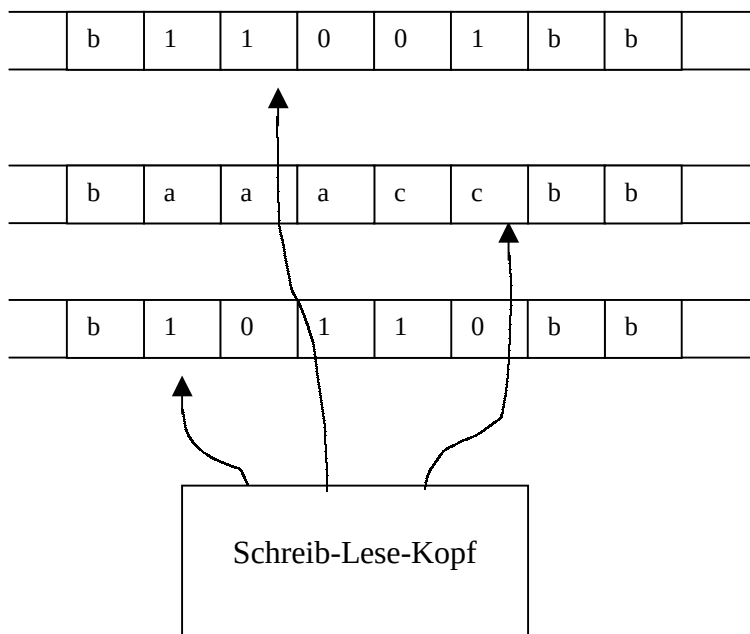
$$h_{\tau_4}(\mathbb{N}) = \{ \epsilon^{2n} \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$$

Beachte: Der Wertebereich τ_4 von ist isomorph dem Haltebereich von τ_3

Setze: $\tau_3 \circ \tau_4 = h_{\tau_4 \circ \tau_3}(\mathbb{N}) = \{ \epsilon^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$

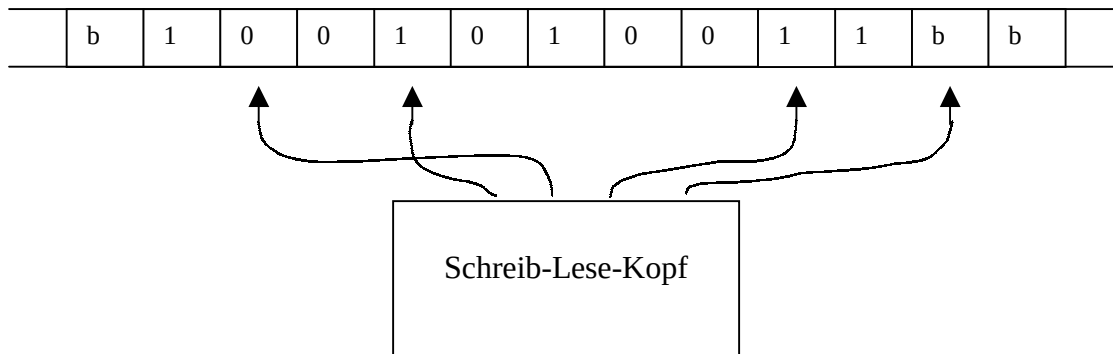
Varianten von Turingmaschinen:

a) k - Band – Turingmaschine mit k – Schreibköpfen



Man gewinnt keine Leistungsfähigkeit. Simuliere k-Bänder durch ein Einzelnes.

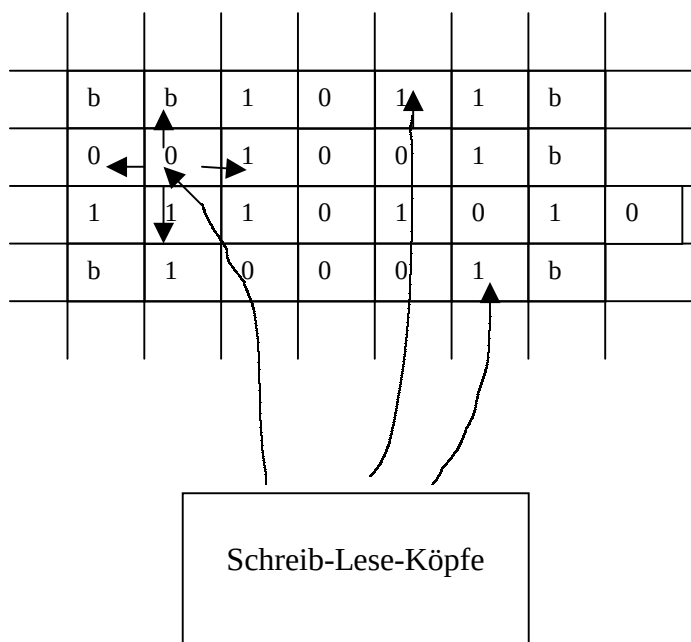
b) k - Kopf – Turingmaschine



Auch hier erhält man keinen Gewinn. Man kann die k – Kopf – TM durch einen 1 – Kopf – TM simulieren.

c) k - dimensionale – Turingmaschine mit m – Schreibköpfen

Beispiel: $k = 2$
 $m = 3$



Auch diese Variante lässt sich wieder durch eine 1-Kopf – Turingmaschine simulieren. Man hat auch hier keinen Gewinn.

d) Endzustände statt der Aktion „halt“

Anstatt der Aktion „halt“ hat man hier Endzustände. Auch dies bringt keinen Leistungsgewinn.

6.2. Registermaschinen

Unterschied zwischen Turingmaschinen und Registermaschinen

Turingmaschinen: unendlicher Speicher mit einem endlichen Wertebereich pro Speicherzelle

Registermaschinen: endlicher Speicher mit unendlichen Wertebereich $\mathbb{J}_0$

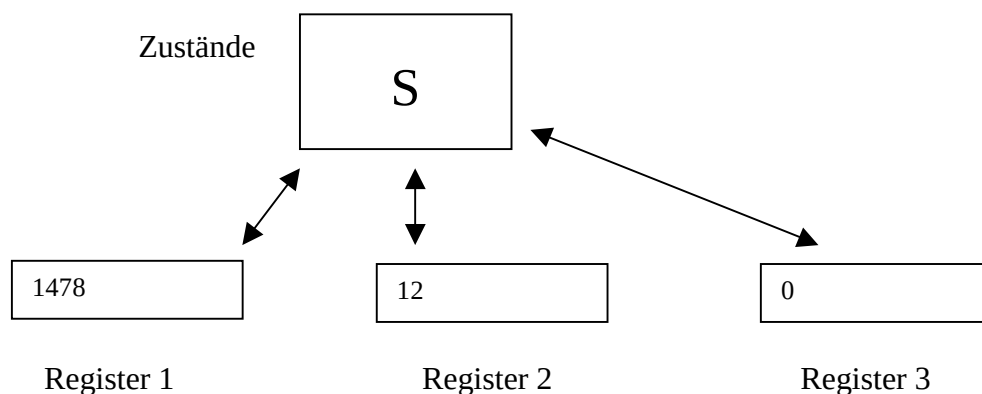
Definition F

Eine k – Registermaschine $\langle \rangle$ beschreibt man durch ein 5 – Tupel

$\langle = (S, k, \delta, s_0, F),$ wobei

- i) S ist eine endlich Menge $\cong$ von Zuständen
- ii) $s_0 \in S$ ist der Anfangszustand
- iii) $k \in \mathbb{J}_0$ ist die Anzahl der Register
- iv) $F \subseteq S$ sind die Endzustände
- v) $\delta = (S \times F) \Delta \{0,1\}^k \times S \Delta \{-1, 0, 1\}^k$ ist die Zustandsübergangsfunktion, dabei bezeichnet man $\{0,1\}^k$ als Nulltest („0“ := „=0“ und „1“ := „ $\neq 0$ “) und $\{-1, 0, 1\}^k$ als Registeroperationen

Veranschaulichung einer 3 – Registermaschine:



Hierbei ist 1478 der momentane Inhalt von Register 1. (Analog für Register 2 und 3 sind die Inhalte 12 und 0).

Definition G

i) $k\zeta = S \Delta \prod_0^k$ heißt Menge der Konfigurationen von ζ

ii) $\nabla = \prod_0$ } $k\zeta$ ist definiert durch $\nabla(n) = (s_0, (n, 0, \dots, 0))$

iii) $\underline{\delta} = k\zeta$ } $k\zeta$ mit $\underline{\delta}(s, (i_1, \dots, i_k)) = (s^!, (j_1^!, \dots, j_k^!))$

Anmerkung:

$\underline{\delta}(s, (i_1, \dots, i_k)) = (s^!, (j_1^!, \dots, j_k^!)) : \Leftrightarrow$ Es gilt

$\underline{\delta}(s, (\text{sign}(i_1), \dots, \text{sign}(i_k))) = (s^!, (j_1^!, \dots, j_k^!))$

$$i_l^! = \begin{cases} i_l + j_l, & \text{sonst} \\ 0, & \text{falls } i_l = 0, j_l = -1 \text{ (modifizierte Subtraktion)} \end{cases}$$

iv) $w : k\zeta \rightarrow \prod_0$ mit $\omega(s, (i_1, \dots, i_k)) = i$ falls $s \gamma F$

v) $h_\zeta : \prod_0 \rightarrow \prod_0$ ist definiert durch

$$h_\zeta(n) = \begin{cases} \omega(\underline{\delta}^m(\alpha(n))), & \text{falls ein } m = \text{Min}\{j \mid \underline{\delta}^j(\alpha(n)) = (s, \dots) \text{ mit } s \gamma F \text{ existiert}\} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

ist die berechnete Funktion von ζ

Definition H

i) Eine Abbildung $h : \prod_0 \rightarrow \prod_0$ heißt RM_k – berechenbar, wenn es eine RM_ζ gibt, so daß $h = h_\zeta$

ii) $RM_k = \{h \mid h \text{ ist } RM_k \text{ berechenbar}\}$

iii) $RM = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} RM_k$

iv) $M \alpha \prod_0$ heißt Haltebereich einer RM, wenn es ein k und eine $RM \zeta$ mit k Registern gibt, so daß $M = \{n \gamma \prod_0 \mid h_\zeta(n) \text{ ist definiert}\}$

v) $M \alpha \prod_0$ heißt Wertebereich/Ergebnisbereich einer RM, wenn es ein k gibt und eine $RM \zeta$ mit k Registern mit $M = \{m \in \prod_0 \mid \exists n \in \prod_0 : h_\zeta(n) = m\}$

Beispiele

1) $\langle_1 = (\{s_0, s_1\}, 1, \delta, s_0, \{s_1\})$

δ	S	Tests	S	Operationen
	s_0	0	s_1	-1
	s_0	1	s_0	-1
	s_1	0	-	-
	s_1	1	-	-

Zählt Register auf 0 und addiert 1 (konstante funktion) $h_1(n) = 1$

2) $\langle_2 = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}, 2, \delta, s_0, \{s_4\})$

S	Tests	S	Operationen	
s_0	1 -	s_1	-1	+1
s_0	0 0	s_4	0	0
s_0	0 1	s_2	0	0
s_1	- -	s_0	0	-1
s_2	- 1	s_3	+1	-1
s_2	- 0	s_4	0	0
s_3	- -	s_2	+1	0

„-“, = beliebig

3) Erweiterung

Will man $h : \mathbb{J}_0^r \rightarrow \mathbb{J}_0^s$, so modifiziert man zuerst ∇ und $\setminus$. So kann man auch die Addition berechnen

$$\tau_{A,A} = RM, a = \{ \mid \}$$