Kapitel 4 - Algorithmen auf Zahlen

- Multiplikation von binären Zahlen
- Matrixmultiplikation

Algorithmen auf Zahlen

Multiplikation ganzer Zahlen

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation ganzer Zahlen

Schulmethode zur Multiplikation n-stelliger Binärzahlen a und b (n=8):

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation ganzer Zahlen

Schulmethode zur Multiplikation n-stelliger Binärzahlen a und b (n=8):

```
aaaaaaaa * bbbbbbbb
```

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation ganzer Zahlen

Schulmethode zur Multiplikation n-stelliger Binärzahlen a und b (n=8):

```
aaaaaaaa * bbbbbbbb
     xxxxxxxx
```

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation ganzer Zahlen

Schulmethode zur Multiplikation n-stelliger Binärzahlen a und b (n=8):

```
aaaaaaaa * bbbbbbbb
     xxxxxxxx
      xxxxxxxx
```

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation ganzer Zahlen

Schulmethode zur Multiplikation n-stelliger Binärzahlen a und b (n=8):

```
aaaaaaaa * bbbbbbbb
     xxxxxxxx
      xxxxxxxx
       xxxxxxxx
```

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation ganzer Zahlen

Schulmethode zur Multiplikation n-stelliger Binärzahlen a und b (n=8):

```
aaaaaaaa * bbbbbbbb
     xxxxxxxx
      xxxxxxxx
       xxxxxxxx
        xxxxxxxx
```

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation ganzer Zahlen

Schulmethode zur Multiplikation n-stelliger Binärzahlen a und b (n=8):

```
aaaaaaaa * bbbbbbbb
     xxxxxxxx
      xxxxxxxx
       xxxxxxxx
        xxxxxxxx
         xxxxxxxx
```

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation ganzer Zahlen

Schulmethode zur Multiplikation n-stelliger Binärzahlen a und b (n=8):

```
aaaaaaaa * bbbbbbbb
     xxxxxxxx
      xxxxxxxx
       xxxxxxxx
        xxxxxxxx
         xxxxxxxx
          xxxxxxxx
           xxxxxxxx
```

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation ganzer Zahlen

Schulmethode zur Multiplikation n-stelliger Binärzahlen a und b (n=8):

```
aaaaaaaa * bbbbbbbb
     xxxxxxxx
      xxxxxxxx
       xxxxxxxx
        xxxxxxxx
         xxxxxxxx
          xxxxxxxx
           xxxxxxxx
            xxxxxxxx
```

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation ganzer Zahlen

Schulmethode zur Multiplikation n-stelliger Binärzahlen a und b (n=8):

```
aaaaaaaa * bbbbbbbb
     xxxxxxxx
      xxxxxxxx
       xxxxxxxx
        xxxxxxxx
         xxxxxxxx
          xxxxxxxx
           xxxxxxxx
            xxxxxxxx
```

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation ganzer Zahlen

Schulmethode zur Multiplikation n-stelliger Binärzahlen a und b (n=8):

```
aaaaaaaa * bbbbbbbb
     xxxxxxxx
      xxxxxxxx
       xxxxxxxx
        xxxxxxxx
         xxxxxxxx
          xxxxxxxx
           xxxxxxxx
            xxxxxxxx
----------------
```

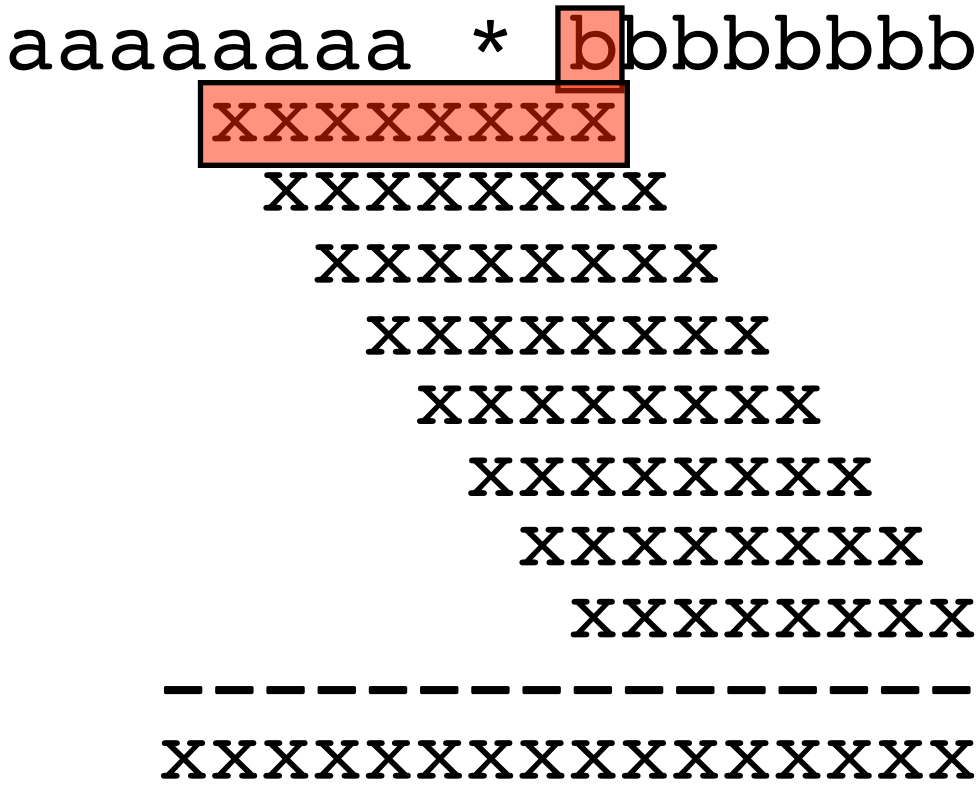
Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation ganzer Zahlen

Schulmethode zur Multiplikation n-stelliger Binärzahlen a und b (n=8):

```
aaaaaaaa * bbbbbbbb
     xxxxxxxx
      xxxxxxxx
       xxxxxxxx
        xxxxxxxx
         xxxxxxxx
          xxxxxxxx
           xxxxxxxx
            xxxxxxxx
----------------
xxxxxxxxxxxxxxxx
```

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation ganzer Zahlen

Schulmethode zur Multiplikation n-stelliger Binärzahlen a und b (n=8):



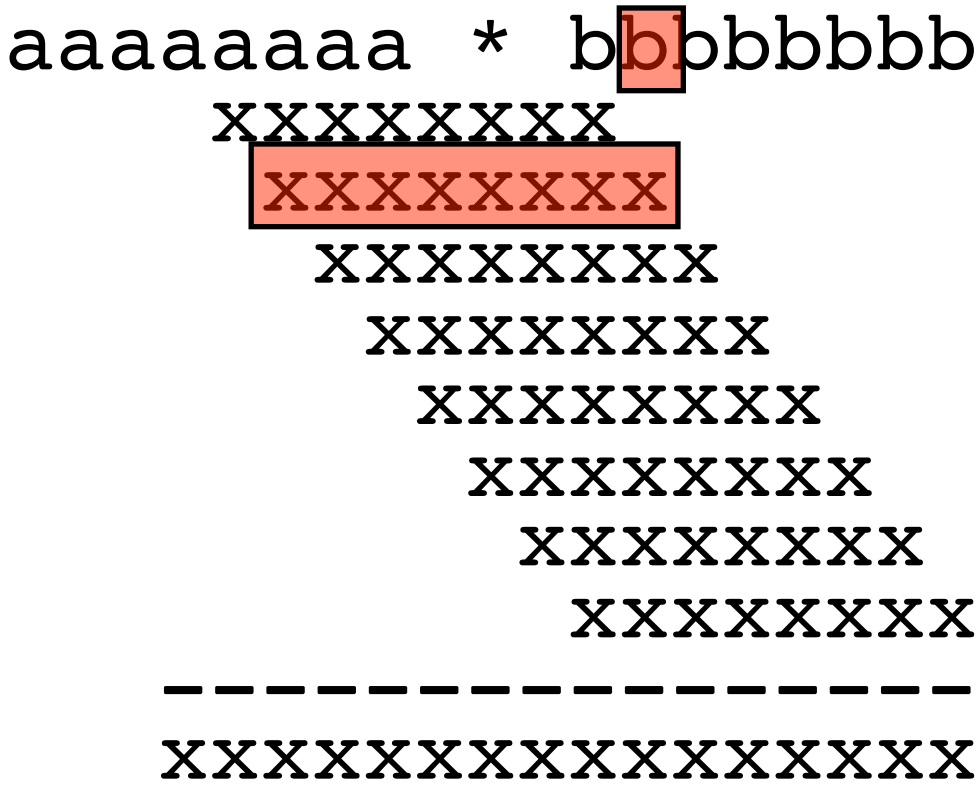
Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation ganzer Zahlen

Schulmethode zur Multiplikation n-stelliger Binärzahlen a und b (n=8):

```
aaaaaaaa * bbbbbbbb
     xxxxxxxx
      xxxxxxxx
       xxxxxxxx
        xxxxxxxx
         xxxxxxxx
          xxxxxxxx
           xxxxxxxx
            xxxxxxxx
----------------
xxxxxxxxxxxxxxxx
```

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation ganzer Zahlen

Schulmethode zur Multiplikation n-stelliger Binärzahlen a und b (n=8):



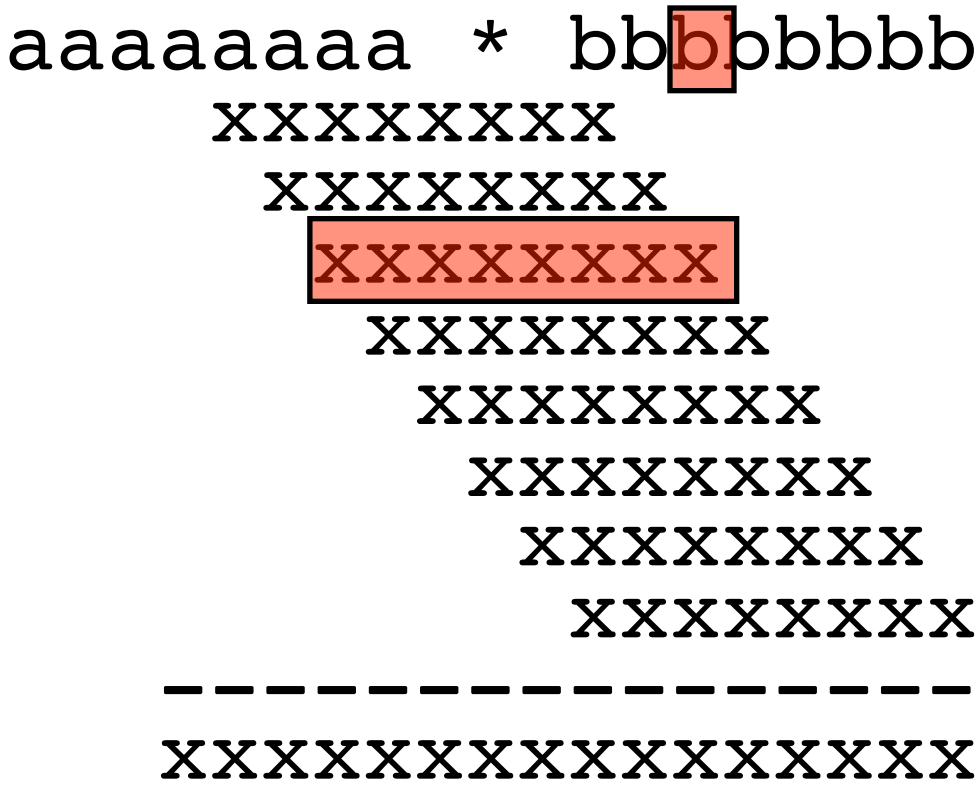
Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation ganzer Zahlen

Schulmethode zur Multiplikation n-stelliger Binärzahlen a und b (n=8):

```
aaaaaaaa * bbbbbbbb
     xxxxxxxx
      xxxxxxxx
       xxxxxxxx
        xxxxxxxx
         xxxxxxxx
          xxxxxxxx
           xxxxxxxx
            xxxxxxxx
----------------
xxxxxxxxxxxxxxxx
```

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation ganzer Zahlen

Schulmethode zur Multiplikation n-stelliger Binärzahlen a und b (n=8):



Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation ganzer Zahlen

Schulmethode zur Multiplikation n-stelliger Binärzahlen a und b (n=8):

```
aaaaaaaa * bbbbbbbb
     xxxxxxxx
      xxxxxxxx
       xxxxxxxx
        xxxxxxxx
         xxxxxxxx
          xxxxxxxx
           xxxxxxxx
            xxxxxxxx
----------------
xxxxxxxxxxxxxxxx
```

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation ganzer Zahlen

Schulmethode zur Multiplikation n-stelliger Binärzahlen a und b (n=8):

```
aaaaaaaa * bbbbbbbb
     xxxxxxxx
      xxxxxxxx
       xxxxxxxx
        xxxxxxxx
         xxxxxxxx
          xxxxxxxx
           xxxxxxxx
            xxxxxxxx
----------------
xxxxxxxxxxxxxxxx
```

b=0: zugeh. Zeile entfällt

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

Lemma:

Die Schulmethode benötigt zur Multiplikation zweier binärer n-Bit Zahlen maximal

$$2n(n-1)=O(n^2)$$

einstellige Bitadditionen.

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

Beweisskizze:

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

Beweisskizze:

xxxxxxxxx

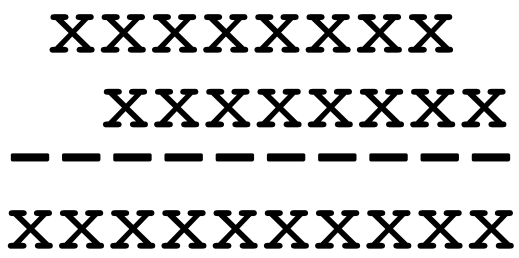
Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

Beweisskizze:

```
xxxxxxxxx
  xxxxxxxxx
```

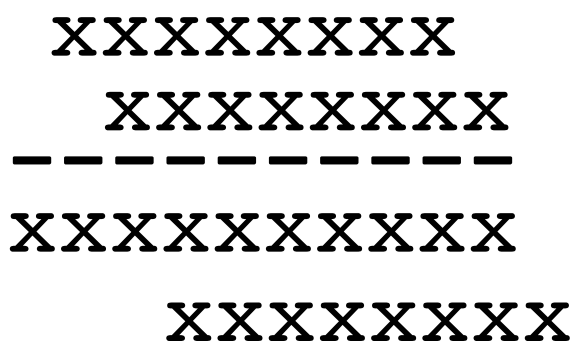
Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

Beweisskizze:



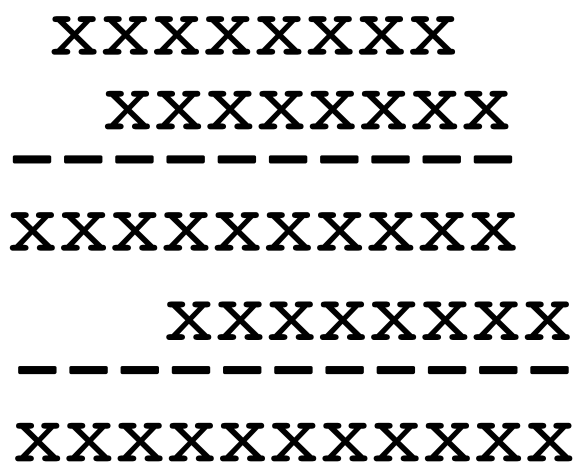
Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

Beweisskizze:



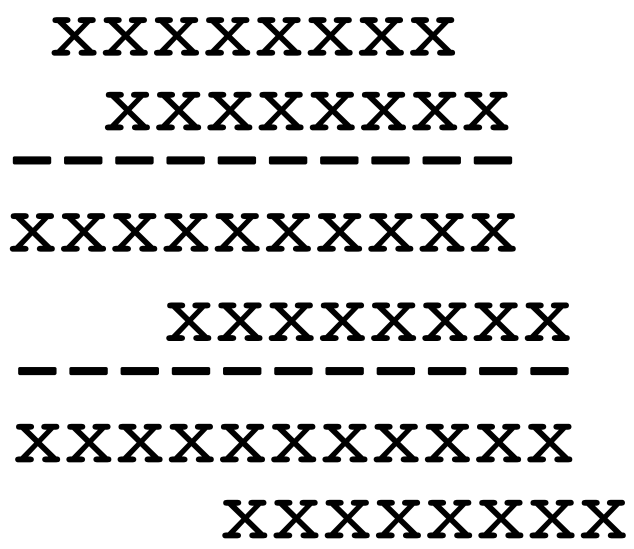
Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

Beweisskizze:



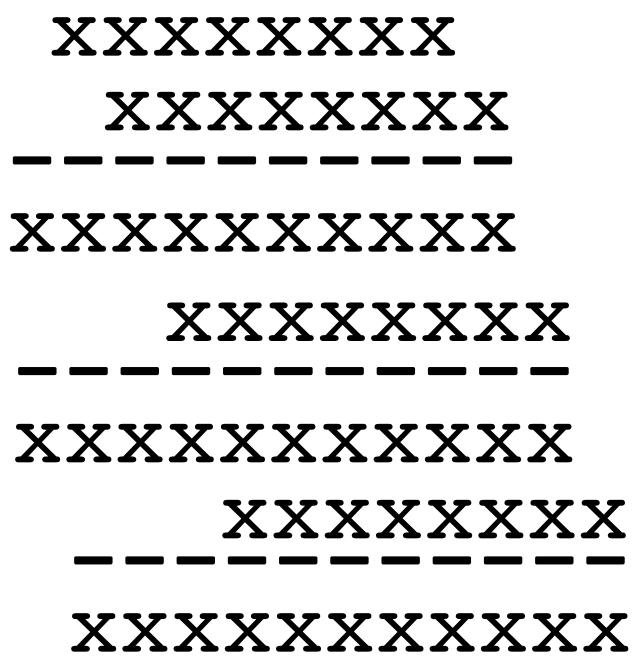
Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

Beweisskizze:



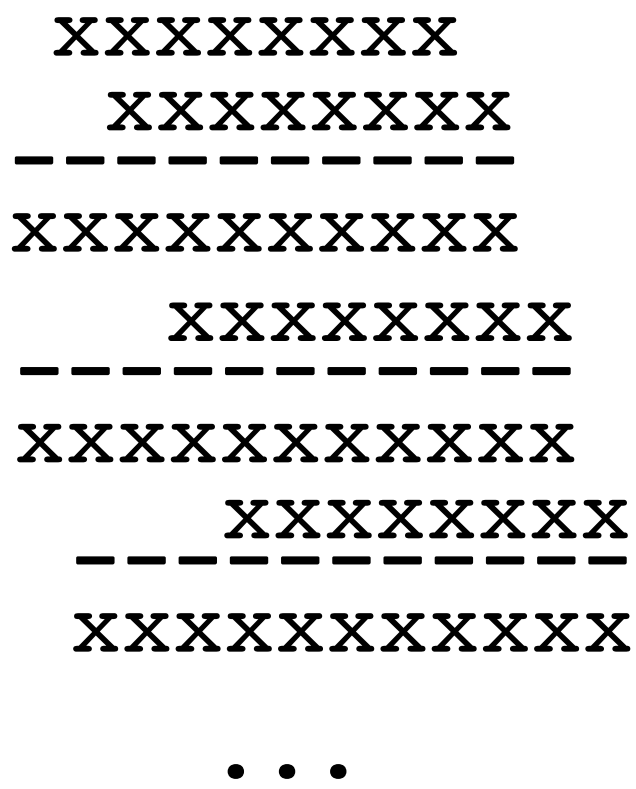
Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

Beweisskizze:



Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

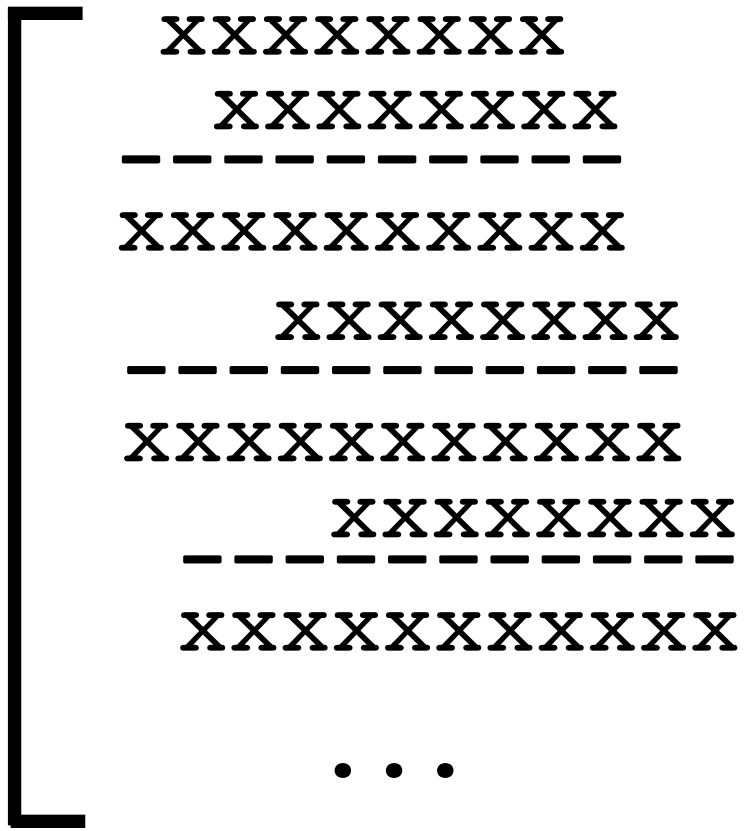
Beweisskizze:



Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

Beweisskizze:

n-1 Bitstring-Additionen



Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

xxxxxxxxx

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

```
xxxxxxxxx
  xxxxxxxxx
```

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

```
  xxxxxxxxx
    xxxxxxxxx
-------------
xxxxxxxxxxx
```

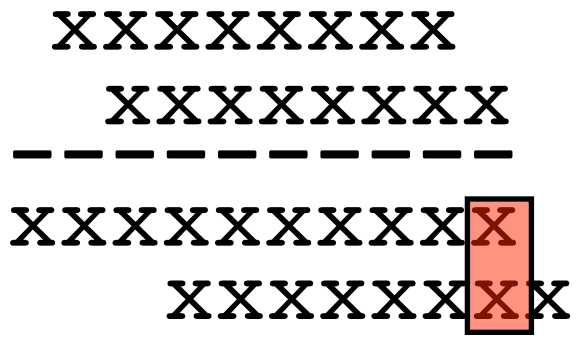
Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

```
  xxxxxxxxx
    xxxxxxxxx
 -----------
 xxxxxxxxxxx
      xxxxxxxxx
```

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:



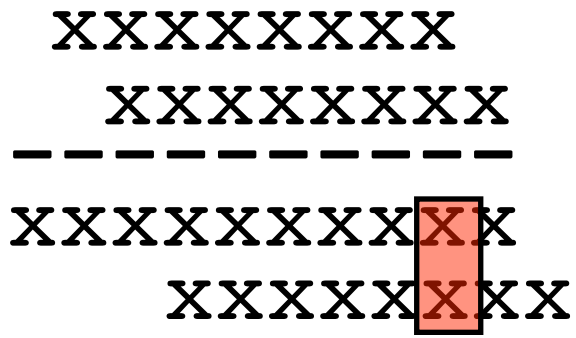
Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

```
  xxxxxxxxx
    xxxxxxxxx
 -----------
 xxxxxxxxxxx
      xxxxxxxxx
```

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:



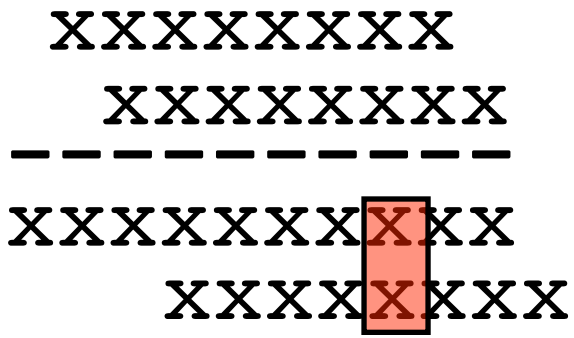
Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

```
  xxxxxxxxx
    xxxxxxxxx
 -----------
 xxxxxxxxxxx
      xxxxxxxxx
```

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:



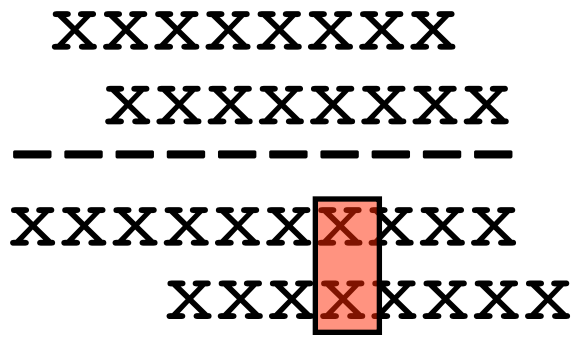
Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

```
  xxxxxxxxx
    xxxxxxxxx
 -----------
 xxxxxxxxxxx
      xxxxxxxxx
```

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:



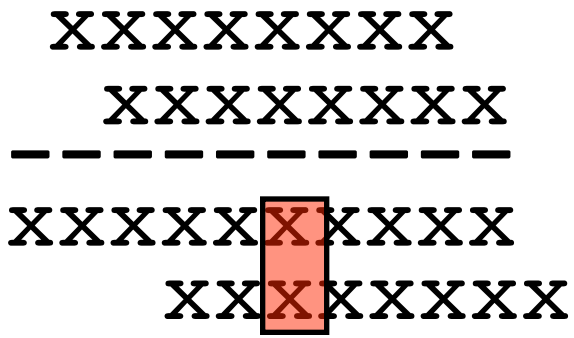
Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

```
  xxxxxxxxx
    xxxxxxxxx
 -----------
 xxxxxxxxxxx
      xxxxxxxxx
```

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:



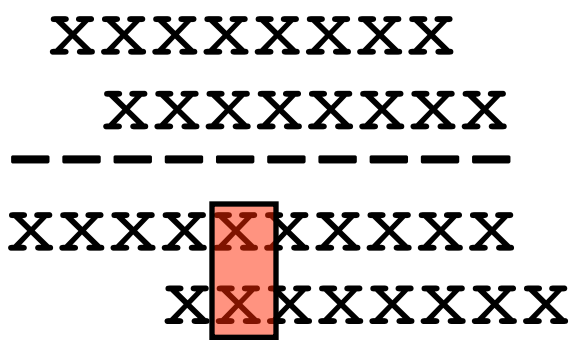
Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

```
  xxxxxxxxx
    xxxxxxxxx
 -----------
 xxxxxxxxxxx
      xxxxxxxxx
```

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:



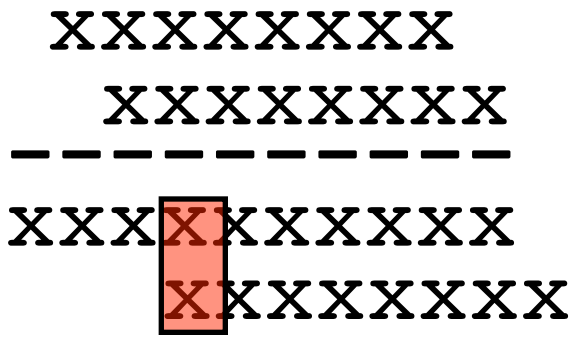
Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

```
  xxxxxxxxx
    xxxxxxxxx
 -----------
 xxxxxxxxxxx
      xxxxxxxxx
```

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:



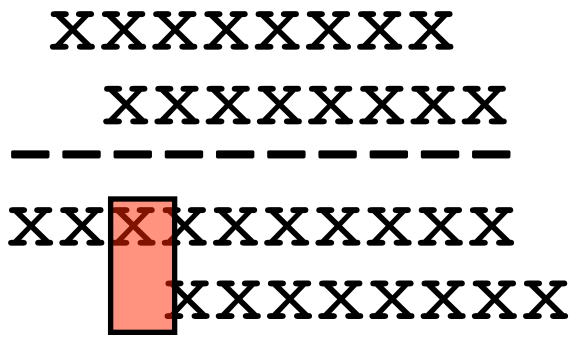
Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

```
  xxxxxxxxx
    xxxxxxxxx
 -----------
 xxxxxxxxxxx
      xxxxxxxxx
```

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:



Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

```
  xxxxxxxxx
    xxxxxxxxx
 -----------
 xxxxxxxxxxx
      xxxxxxxxx
```

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

n Bit-Additionen

```
 xxxxxxxxx
  xxxxxxxxx
-----------
xxxxxxxxxxx
     xxxxxxxxx
```

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

n Bit-Additionen

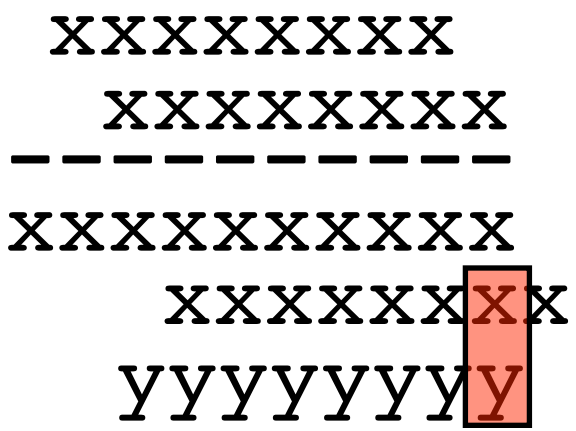
```
 xxxxxxxxx
  xxxxxxxxx
-----------
xxxxxxxxxxx
    xxxxxxxxx
  yyyyyyyyy
```

Überträge

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

n Bit-Additionen



Überträge

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

n Bit-Additionen

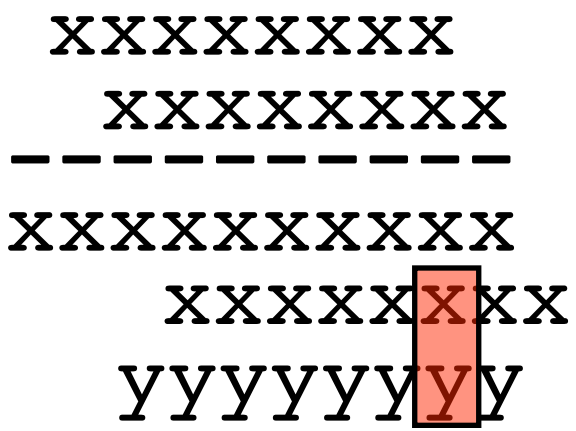
```
 xxxxxxxxx
  xxxxxxxxx
-----------
xxxxxxxxxxx
    xxxxxxxxx
  yyyyyyyyy
```

Überträge

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

n Bit-Additionen



Überträge

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

n Bit-Additionen

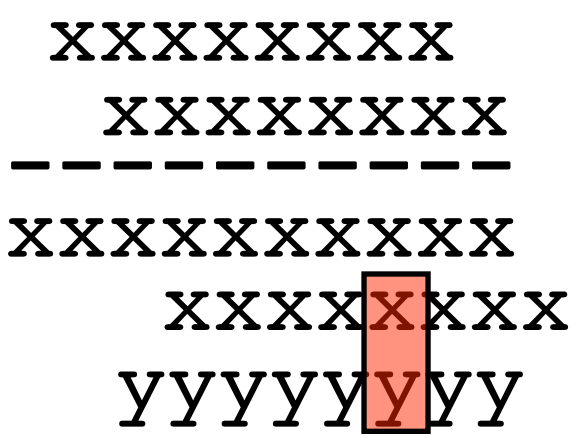
```
 xxxxxxxxx
  xxxxxxxxx
-----------
xxxxxxxxxxx
    xxxxxxxxx
  yyyyyyyyy
```

Überträge

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

n Bit-Additionen



Überträge

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

n Bit-Additionen

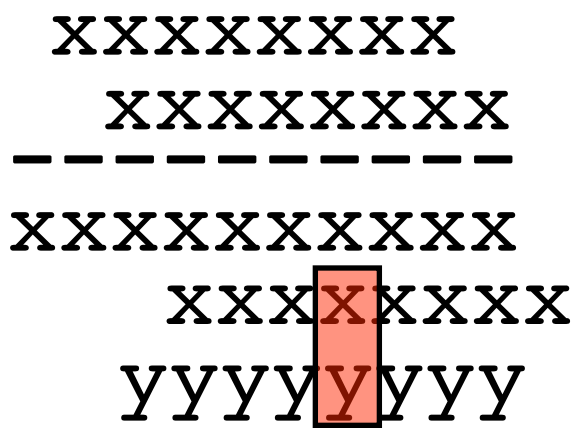
```
 xxxxxxxxx
  xxxxxxxxx
-----------
xxxxxxxxxxx
    xxxxxxxxx
  yyyyyyyyy
```

Überträge

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

n Bit-Additionen



Überträge

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

n Bit-Additionen

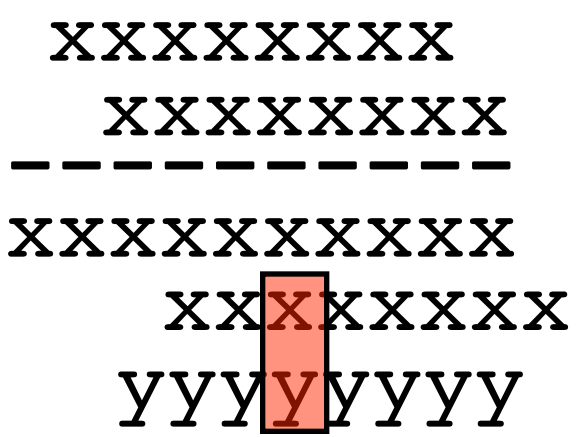
```
 xxxxxxxxx
  xxxxxxxxx
-----------
xxxxxxxxxxx
    xxxxxxxxx
  yyyyyyyyy
```

Überträge

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

n Bit-Additionen



Überträge

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

n Bit-Additionen

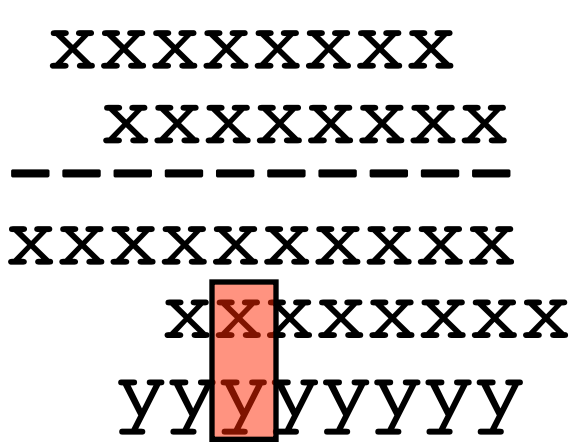
```
 xxxxxxxxx
  xxxxxxxxx
-----------
xxxxxxxxxxx
    xxxxxxxxx
  yyyyyyyyy
```

Überträge

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

n Bit-Additionen



Überträge

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

n Bit-Additionen

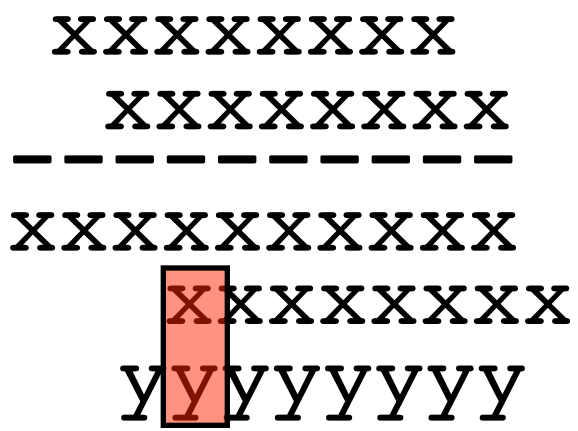
```
 xxxxxxxxx
  xxxxxxxxx
-----------
xxxxxxxxxxx
    xxxxxxxxx
  yyyyyyyyy
```

Überträge

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

n Bit-Additionen



Überträge

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

n Bit-Additionen

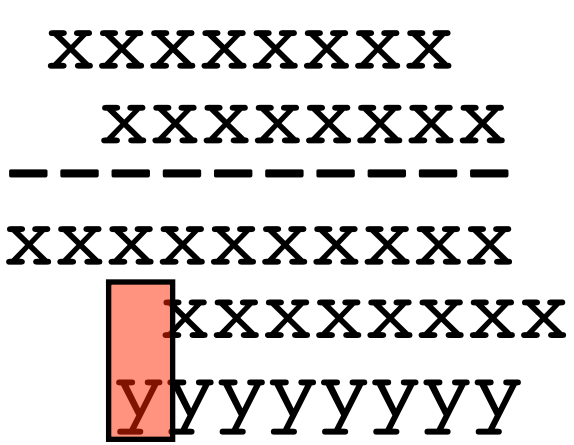
```
 xxxxxxxxx
  xxxxxxxxx
-----------
xxxxxxxxxxx
    xxxxxxxxx
  yyyyyyyyy
```

Überträge

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

n Bit-Additionen



Überträge

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:

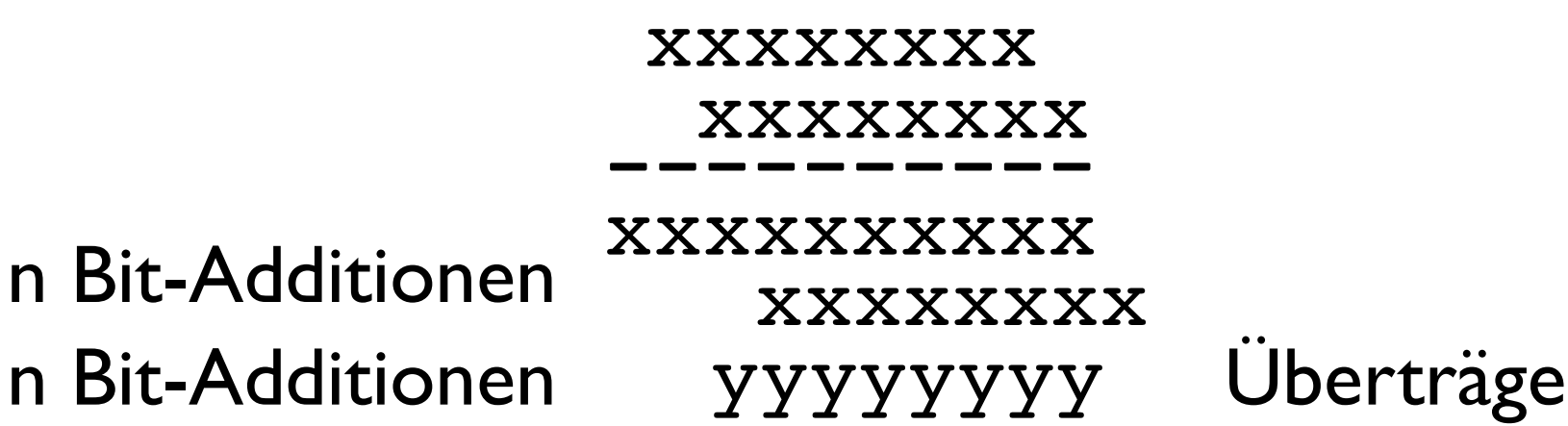
n Bit-Additionen

```
 xxxxxxxxx
  xxxxxxxxx
-----------
xxxxxxxxxxx
    xxxxxxxxx
  yyyyyyyyy
```

Überträge

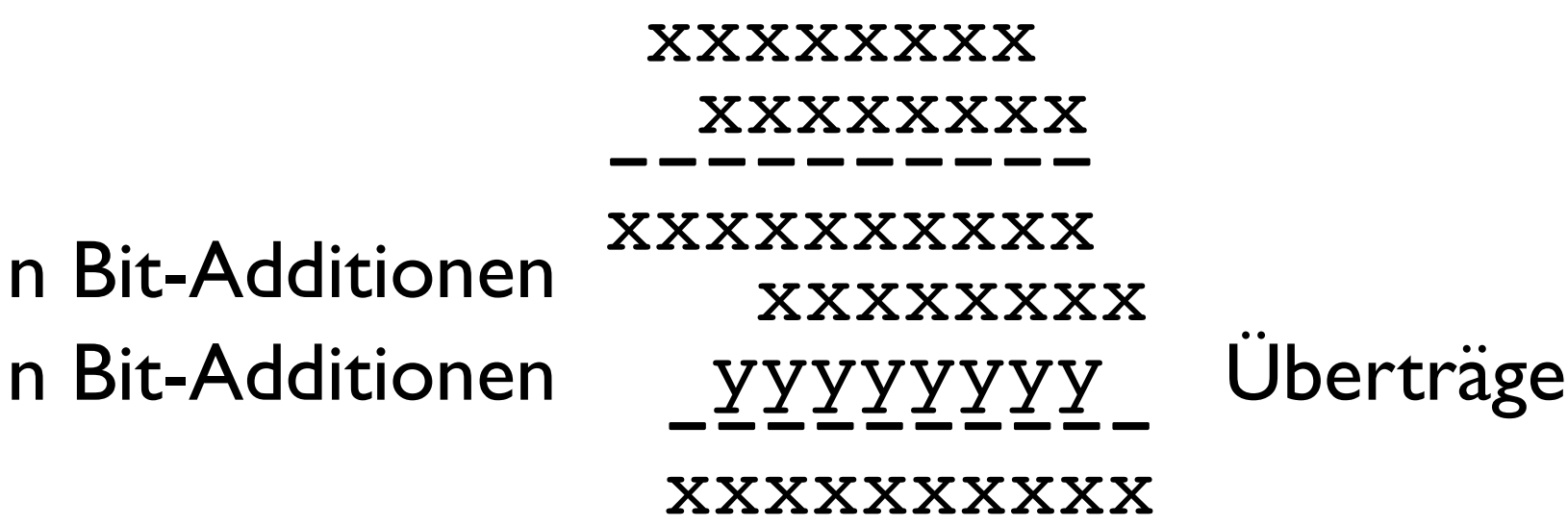
Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:



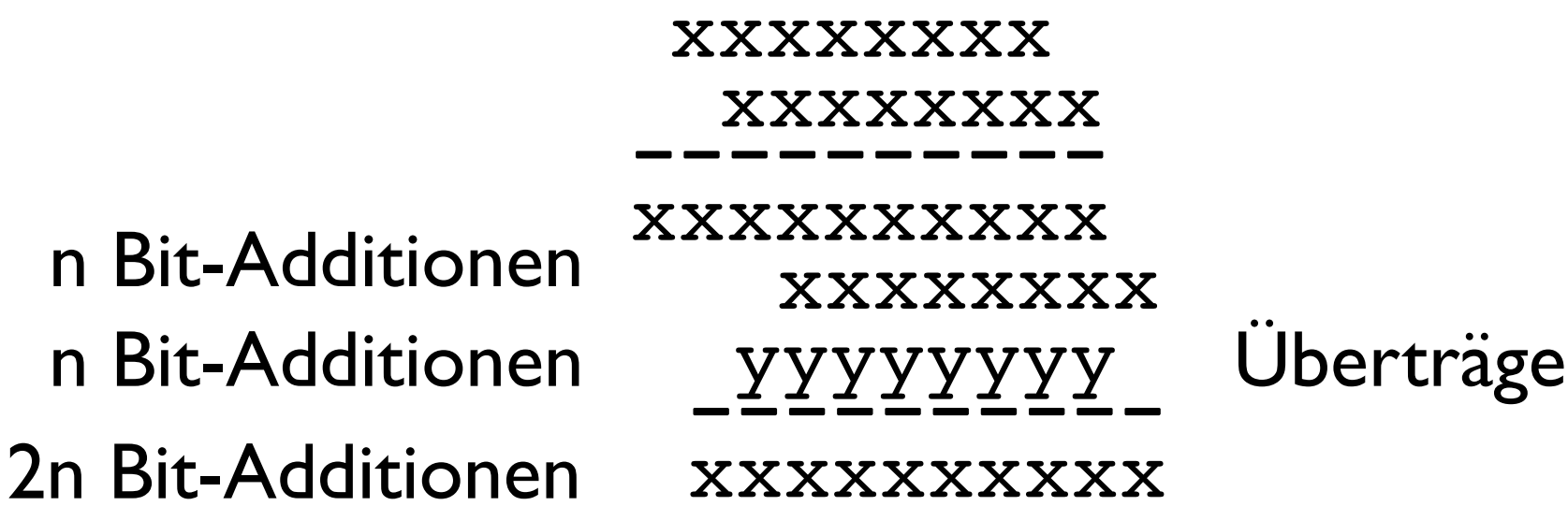
Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:



Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Schulmethode

je Bitstring-Addition:



Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Beschleunigung

- Gesucht: wesentlich schnellere Methode
- Idee: **Divide and conquer-**Verfahren (teile und herrsche)
  - Zerlege das Problem in zwei Teile
  - löse das Problem für die beiden Teile
  - füge die Teilergebnisse zum Gesamtergebnis zusammen.

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Beschleunigung

- Wie teilt man zwei n-stellige Binärzahlen $a=(a_{n-1},...a_0)$ und $b=(b_{n-1},...,b_0)$?
- Setze

$$a^{(1)}=(a_{n-1},...a_{\lceil n/2 \rceil}),\ a^{(0)}=(a_{\lceil n/2 \rceil -1},...a_0)$$

$$b^{(1)}=(b_{n-1},...b_{\lceil n/2 \rceil}),\ b^{(0)}=(b_{\lceil n/2 \rceil -1},...b_0)$$

- Dann gilt:

$$a=a^{(1)}\cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)}$$

$$b=b^{(1)}\cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + b^{(0)}$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Beschleunigung

- Dann gilt ferner:

$$a \cdot b = (a^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + b^{(0)})$$

$$= a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+ a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

- Laufzeit:

$$T(n) =$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Beschleunigung

- Dann gilt ferner:

$$a \cdot b = (a^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + b^{(0)})$$

$$= a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+ a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

- Laufzeit:

$$T(n) =$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Beschleunigung

- Dann gilt ferner:

$$a \cdot b = (a^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + b^{(0)})$$

$$= a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+ a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

- Laufzeit:

$$T(n) = T(n/2) +$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Beschleunigung

- Dann gilt ferner:

$$a \cdot b = (a^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + b^{(0)})$$

$$= a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+ a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

- Laufzeit:

$$T(n) = T(n/2) +$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Beschleunigung

- Dann gilt ferner:

$$a \cdot b = (a^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + b^{(0)})$$

$$= a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+ a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

- Laufzeit:

$$T(n) = T(n/2) +$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Beschleunigung

- Dann gilt ferner:

$$a \cdot b = (a^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + b^{(0)})$$

$$= a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+ a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

- Laufzeit:

$$T(n) = T(n/2) + T(n/2) +$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Beschleunigung

- Dann gilt ferner:

$$a \cdot b = (a^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + b^{(0)})$$

$$= a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+ a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

- Laufzeit:

$$T(n) = T(n/2) + T(n/2) +$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Beschleunigung

- Dann gilt ferner:

$$a \cdot b = (a^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + b^{(0)})$$

$$= a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+ a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

- Laufzeit:

$$T(n) = T(n/2) + T(n/2) +$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Beschleunigung

- Dann gilt ferner:

$$a \cdot b = (a^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + b^{(0)})$$

$$= a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+ a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

- Laufzeit:

$$T(n) = T(n/2) + T(n/2) + T(n/2) +$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Beschleunigung

- Dann gilt ferner:

$$a \cdot b = (a^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + b^{(0)})$$

$$= a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+ a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

- Laufzeit:

$$T(n) = T(n/2) + T(n/2) + T(n/2) +$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Beschleunigung

- Dann gilt ferner:

$$a \cdot b = (a^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + b^{(0)})$$

$$= a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+ a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + \boxed{a^{(0)} \cdot b^{(0)}}$$

- Laufzeit:

$$T(n) = T(n/2) + T(n/2) + T(n/2) +$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Beschleunigung

- Dann gilt ferner:

$$a \cdot b = (a^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + b^{(0)})$$

$$= a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+ a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + \boxed{a^{(0)} \cdot b^{(0)}}$$

- Laufzeit:

$$T(n) = T(n/2) + T(n/2) + T(n/2) + T(n/2) +$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Beschleunigung

- Dann gilt ferner:

$$a \cdot b = (a^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + b^{(0)})$$

$$= a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+ a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

- Laufzeit:

$$T(n) = T(n/2) + T(n/2) + T(n/2) + T(n/2) +$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Beschleunigung

- Dann gilt ferner:

$$a \cdot b = (a^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + b^{(0)})$$

$$= a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+ a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

- Laufzeit:

$$T(n) = T(n/2) + T(n/2) + T(n/2) + T(n/2) +$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Beschleunigung

- Dann gilt ferner:

$$a \cdot b = (a^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + b^{(0)})$$

$$= a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

- Laufzeit:

$$T(n) = \underset{O(n)}{T(n/2) + T(n/2) + T(n/2) + T(n/2) +}$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Beschleunigung

- Dann gilt ferner:

$$a \cdot b = (a^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + b^{(0)})$$

$$= a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+ a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

- Laufzeit:

$$T(n) = \begin{matrix} T(n/2) + T(n/2) + T(n/2) + T(n/2) + \\ O(n) \end{matrix}$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Beschleunigung

- Dann gilt ferner:

$$a \cdot b = (a^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + b^{(0)})$$

$$= a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+ a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

- Laufzeit:

$$T(n) = \begin{matrix} T(n/2) + T(n/2) + T(n/2) + T(n/2) + \\ O(n) \end{matrix}$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Beschleunigung

- Dann gilt ferner:

$$a \cdot b = (a^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + b^{(0)})$$

$$= a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+ a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

kostenlos: Linksschieben = *2

- Laufzeit:

$$T(n) = \underset{O(n)}{T(n/2) + T(n/2) + T(n/2) + T(n/2) +}$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Beschleunigung

- Dann gilt ferner:

$$a \cdot b = (a^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + b^{(0)})$$

$$= a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+ a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

kostenlos: Linksschieben = *2

- Laufzeit:

$$T(n) = \begin{matrix} T(n/2) + T(n/2) + T(n/2) + T(n/2) + \\ O(n) = 4T(n/2) + O(n) \end{matrix}$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Beschleunigung

- Leider gilt: Aus

$$T(n)=4*T(n/2)+O(n),$$

$$T(1)=1$$

- folgt (selbst nachweisen!)

$$T(n)=O(n^2),$$

also nicht besser als die Schulmethode.

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - geniale Idee

- Geniale Idee:

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2 \lceil n/2 \rceil}$$

$$+ a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+ a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

- umschreiben zu:

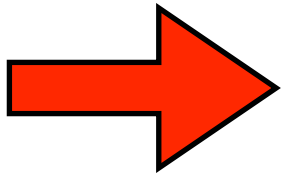
$$(a^{(1)} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} + b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}).$$

1 Multiplikation und 3 Additionen.

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - geniale Idee

- Geniale Idee:

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2 \lceil n/2 \rceil}$$



$$+a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

- umschreiben zu:

$$(a^{(1)}+a^{(0)}) \cdot (b^{(1)}+b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}).$$

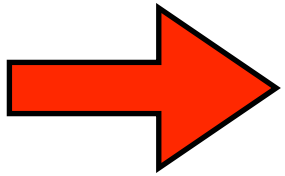
1 Multiplikation und 3 Additionen.

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - geniale Idee

- Geniale Idee:

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil}$$

hier:
2 Multiplikationen



$$+a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} \; +a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

- umschreiben zu:

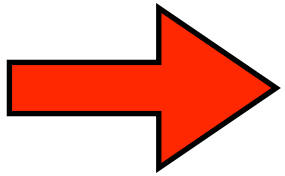
$$(a^{(1)}+a^{(0)}) \cdot (b^{(1)}+b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}).$$

1 Multiplikation und 3 Additionen.

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - geniale Idee

- Geniale Idee:

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2 \lceil n/2 \rceil}$$



$$+a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

- umschreiben zu:

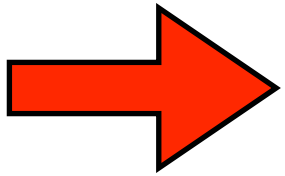
$$(a^{(1)}+a^{(0)}) \cdot (b^{(1)}+b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}).$$

1 Multiplikation und 3 Additionen.

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - geniale Idee

- Geniale Idee:

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil}$$



$$+a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

hier:
1 Addition

- umschreiben zu:

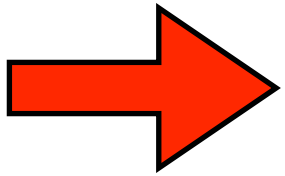
$$(a^{(1)}+a^{(0)}) \cdot (b^{(1)}+b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}).$$

1 Multiplikation und 3 Additionen.

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - geniale Idee

- Geniale Idee:

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2 \lceil n/2 \rceil}$$



$$+a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

- umschreiben zu:

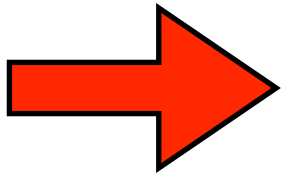
$$(a^{(1)}+a^{(0)}) \cdot (b^{(1)}+b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}).$$

1 Multiplikation und 3 Additionen.

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - geniale Idee

- Geniale Idee:

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil}$$



$$+a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

- umschreiben zu:

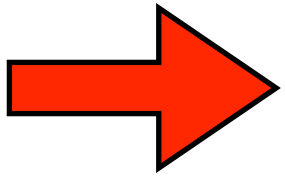
$$(a^{(1)}+a^{(0)}) \cdot (b^{(1)}+b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}).$$

1 Multiplikation und 3 Additionen.

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - geniale Idee

- Geniale Idee:

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2 \lceil n/2 \rceil}$$



$$+a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

- umschreiben zu:

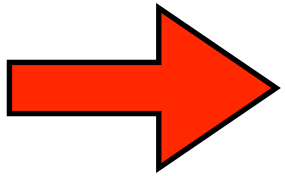
$$(a^{(1)}+a^{(0)}) \cdot (b^{(1)}+b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}).$$

1 Multiplikation und 3 Additionen.

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - geniale Idee

- Geniale Idee:

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2 \lceil n/2 \rceil}$$



$$+a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

- umschreiben zu:

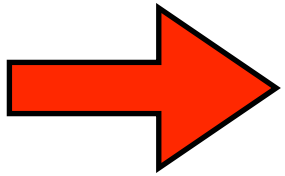
$$(a^{(1)} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} + b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}).$$

1 Multiplikation und 3 Additionen.

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - geniale Idee

- Geniale Idee:

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2 \lceil n/2 \rceil}$$



$$+a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

- umschreiben zu:

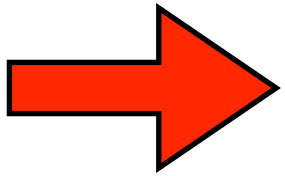
$$(a^{(1)}+a^{(0)}) \cdot (b^{(1)}+b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}).$$

1 Multiplikation und 3 Additionen.

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - geniale Idee

- Geniale Idee:

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil}$$



$$+a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

liegen bereits vor

- umschreiben zu:

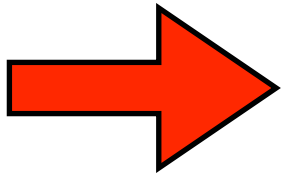
$$(a^{(1)}+a^{(0)}) \cdot (b^{(1)}+b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}).$$

1 Multiplikation und 3 Additionen.

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - geniale Idee

- Geniale Idee:

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2 \lceil n/2 \rceil}$$



$$+a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

- umschreiben zu:

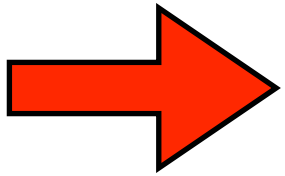
$$(a^{(1)}+a^{(0)}) \cdot (b^{(1)}+b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}).$$

1 Multiplikation und 3 Additionen.

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - geniale Idee

- Geniale Idee:

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil}$$



$$+a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

liegen bereits vor

- umschreiben zu:

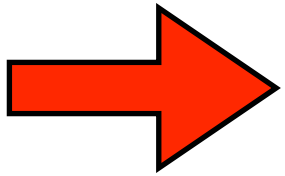
$$(a^{(1)}+a^{(0)}) \cdot (b^{(1)}+b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}).$$

1 Multiplikation und 3 Additionen.

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - geniale Idee

- Geniale Idee:

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2 \lceil n/2 \rceil}$$



$$+a^{(1)} \cdot b^{(0)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil} + a^{(0)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

$$+a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

- umschreiben zu:

$$(a^{(1)}+a^{(0)}) \cdot (b^{(1)}+b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}).$$

1 Multiplikation und 3 Additionen.

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Ergebnis

- Insgesamt:
  - Gespart: 1 Multiplikation
  - Geopfert: 3 Additionen
  - Da Multiplikationen aufwendiger als Additionen insgesamt Operationen und Zeit gespart.

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Ergebnis

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil}$$

$$+(a^{(1)}+a^{(0)}) \cdot (b^{(1)}+b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)})$$
$$+a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

Laufzeit nun:

$$T(n) = 2\,T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n)$$

$$\leq 3\,T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n).$$

Konstante in O(n):

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Ergebnis

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil}$$

$$+(a^{(1)}+a^{(0)}) \cdot (b^{(1)}+b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)})$$

$$+a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

Laufzeit nun:

$$T(n) = 2\,T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n)$$

$$\leq 3\,T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n).$$

Konstante in O(n):

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Ergebnis

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil}$$

$$+(a^{(1)}+a^{(0)}) \cdot (b^{(1)}+b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)})$$
$$+a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

Laufzeit nun:

$$T(n) = 2\,T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n)$$

$$\leq 3\,T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n).$$

Konstante in O(n):

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Ergebnis

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + (a^{(1)} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} + b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}) + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

Laufzeit nun:

$$T(n) = 2\,T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n)$$

$$\leq 3\,T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n).$$

Konstante in $O(n)$:

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Ergebnis

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil}$$

$$+(a^{(1)}+a^{(0)}) \cdot (b^{(1)}+b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)})$$
$$+a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

Laufzeit nun:

$$T(n) = 2\,T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n)$$

$$\leq 3\,T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n).$$

Konstante in O(n):

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Ergebnis

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + (a^{(1)} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} + b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}) + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

Laufzeit nun:

$$T(n) = 2\,T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n)$$

$$\leq 3\,T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n).$$

Konstante in O(n):

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Ergebnis

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil}$$

$$+(a^{(1)}+a^{(0)}) \cdot (b^{(1)}+b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)})$$
$$+a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

Laufzeit nun:

$$T(n) = 2\,T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n)$$

$$\leq 3\,T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n).$$

Konstante in O(n):

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Ergebnis

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + (a^{(1)} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} + b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}) + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

Laufzeit nun:

$$T(n) = 2\,T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n)$$

$$\leq 3\,T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n).$$

Konstante in $O(n)$:

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Ergebnis

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil}$$

$$+(a^{(1)}+a^{(0)}) \cdot (b^{(1)}+b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)})$$

$$+a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

Laufzeit nun:

$$T(n) = 2\,T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n)$$

$$\leq 3\,T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n).$$

Konstante in O(n):

$2n+$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Ergebnis

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + (a^{(1)} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} + b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}) + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

Laufzeit nun:

$$T(n) = 2\,T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n)$$

$$\leq 3\,T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n).$$

Konstante in O(n):

$2n+$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Ergebnis

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + (a^{(1)} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} + b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}) + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

Laufzeit nun:

$$T(n) = 2\,T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n)$$

$$\leq 3\,T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n).$$

Konstante in O(n):

$$2n + 2(n/2) +$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Ergebnis

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + (a^{(1)} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} + b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}) + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

Laufzeit nun:

$$T(n) = 2\,T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n)$$

$$\leq 3\,T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n).$$

Konstante in O(n):

$2n+2(n/2)+$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Ergebnis

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + (a^{(1)} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} + b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}) + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

Laufzeit nun:

$$T(n) = 2\,T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n)$$

$$\leq 3\,T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n).$$

Konstante in O(n):

$$2n + 2(n/2) + 2(n/2) +$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Ergebnis

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + (a^{(1)} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} + b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}) + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

Laufzeit nun:

$$T(n) = 2\,T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n)$$

$$\leq 3\,T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n).$$

Konstante in O(n):

$$2n + 2(n/2) + 2(n/2) +$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Ergebnis

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + (a^{(1)} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} + b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}) + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

Laufzeit nun:

$$T(n) = 2\,T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n)$$

$$\leq 3\,T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n).$$

Konstante in O(n):

$$2n + 2(n/2) + 2(n/2) + 2n +$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Ergebnis

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + (a^{(1)} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} + b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}) + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

Laufzeit nun:

$$T(n) = 2\,T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n)$$

$$\leq 3\,T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n).$$

Konstante in O(n):

$$2n + 2(n/2) + 2(n/2) + 2n +$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Ergebnis

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + (a^{(1)} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} + b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}) + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

Laufzeit nun:

$$T(n) = 2\,T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n)$$

$$\leq 3\,T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n).$$

Konstante in O(n):

$$2n + 2(n/2) + 2(n/2) + 2n + 2n +$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Ergebnis

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil}$$

$$+ (a^{(1)} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} + b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)})$$

$$+ a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

Laufzeit nun:

$$T(n) = 2\,T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n)$$

$$\leq 3\,T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n).$$

Konstante in O(n):

$$2n + 2(n/2) + 2(n/2) + 2n + 2n +$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Ergebnis

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + (a^{(1)} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} + b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}) + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

Laufzeit nun:

$$T(n) = 2\,T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n)$$

$$\leq 3\,T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n).$$

Konstante in O(n):

$$2n + 2(n/2) + 2(n/2) + 2n + 2n + 2n$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Ergebnis

$$a \cdot b = a^{(1)} \cdot b^{(1)} \cdot 2^{2\lceil n/2 \rceil} + (a^{(1)} + a^{(0)}) \cdot (b^{(1)} + b^{(0)}) - (a^{(1)} \cdot b^{(1)} + a^{(0)} \cdot b^{(0)}) + a^{(0)} \cdot b^{(0)}$$

Laufzeit nun:

$$T(n) = 2\,T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n)$$

$$\leq 3\,T(\lceil n/2 \rceil + 1) + O(n).$$

Konstante in O(n):

$$2n + 2(n/2) + 2(n/2) + 2n + 2n + 2n = 10n$$

Algorithmen auf Zahlen

Multiplikation - Rekursionsgleichung

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Rekursionsgleichung

Löse Rekursionsgleichung (Annahme n Zweierpotenz):

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Rekursionsgleichung

Löse Rekursionsgleichung (Annahme n Zweierpotenz):

$T(n)=3\,T(n/2+1)+O(n)$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Rekursionsgleichung

Löse Rekursionsgleichung (Annahme n Zweierpotenz):

$T(n)=3\,T(n/2+1)+O(n)$

$\leq 3^2\,T(n/2^2+2)+3\cdot 10(n/2+1)+2+10n$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Rekursionsgleichung

Löse Rekursionsgleichung (Annahme n Zweierpotenz):

$T(n)=3\,T(n/2+1)+O(n)$

$\leq 3^2\,T(n/2^2+2)+3\cdot 10(n/2+1)+2+10n$

$=3^3\,T(n/2^3+2)+3^{2\cdot}10(n/2^2)+2\cdot 3\cdot 10(n/2)+2+10n$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Rekursionsgleichung

Löse Rekursionsgleichung (Annahme n Zweierpotenz):

$T(n)=3\,T(n/2+1)+O(n)$

$\leq 3^2\,T(n/2^2+2)+3\cdot 10(n/2+1)+2+10n$

$=3^3\,T(n/2^3+2)+3^{2\cdot}10(n/2^2)+2\cdot 3\cdot 10(n/2)+2+10n$

... nach k Iterationen

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Rekursionsgleichung

Löse Rekursionsgleichung (Annahme n Zweierpotenz):

$T(n)=3\,T(n/2+1)+O(n)$

$\leq 3^2\,T(n/2^2+2)+3\cdot 10(n/2+1)+2+10n$

$=3^3\,T(n/2^3+2)+3^{2\cdot}10(n/2^2)+2\cdot 3\cdot 10(n/2)+2+10n$

... nach k Iterationen

$\leq 3^k\,T(n/2^k+2)+\sum_{i=0}^{k-1}(3^{i\cdot}10(n/2^i)+2)$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Rekursionsgleichung

Löse Rekursionsgleichung (Annahme n Zweierpotenz):

$T(n)=3\,T(n/2+1)+O(n)$

$\leq 3^2\,T(n/2^2+2)+3\cdot 10(n/2+1)+2+10n$

$=3^3\,T(n/2^3+2)+3^{2\cdot}10(n/2^2)+2\cdot 3\cdot 10(n/2)+2+10n$

... nach k Iterationen

$\leq 3^k\,T(n/2^k+2)+\sum_{i=0}^{k-1}(3^{i\cdot}10(n/2^i)+2)$

für k=log n gilt dann

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Rekursionsgleichung

Löse Rekursionsgleichung (Annahme n Zweierpotenz):

$T(n)=3\,T(n/2+1)+O(n)$

$\leq 3^2\,T(n/2^2+2)+3\cdot 10(n/2+1)+2+10n$

$=3^3\,T(n/2^3+2)+3^{2\cdot}10(n/2^2)+2\cdot 3\cdot 10(n/2)+2+10n$

... nach k Iterationen

$\leq 3^k\,T(n/2^k+2)+\sum_{i=0}^{k-1}(3^{i\cdot}10(n/2^i)+2)$

für k=log n gilt dann

$\leq 3^{\log n}\,T(n/2^{\log n}+2)+\sum_{i=0}^{\log n-1}(3^{i\cdot}10(n/2^i)+2)$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Rekursionsgleichung

Löse Rekursionsgleichung (Annahme n Zweierpotenz):

$T(n)=3\,T(n/2+1)+O(n)$

$\leq 3^2\,T(n/2^2+2)+3\cdot 10(n/2+1)+2+10n$

$=3^3\,T(n/2^3+2)+3^{2\cdot}10(n/2^2)+2\cdot 3\cdot 10(n/2)+2+10n$

... nach k Iterationen

$\leq 3^k\,T(n/2^k+2)+\sum_{i=0}^{k-1}(3^{i\cdot}10(n/2^i)+2)$

für k=log n gilt dann

$\leq 3^{\log n}\,T(n/2^{\log n}+2)+\sum_{i=0}^{\log n-1}(3^{i\cdot}10(n/2^i)+2)$

$\leq 2^{\log 3 \log n}\,T(3)+10\sum_{i=0}^{\log n-1}(3^{i\cdot}(n/2^i)+2)$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Rekursionsgleichung

Löse Rekursionsgleichung (Annahme n Zweierpotenz):

$T(n)=3\,T(n/2+1)+O(n)$

$\leq 3^2\,T(n/2^2+2)+3\cdot 10(n/2+1)+2+10n$

$=3^3\,T(n/2^3+2)+3^{2\cdot}10(n/2^2)+2\cdot 3\cdot 10(n/2)+2+10n$

... nach k Iterationen

$\leq 3^k\,T(n/2^k+2)+\sum_{i=0}^{k-1}(3^{i\cdot}10(n/2^i)+2)$

für k=log n gilt dann

$\leq 3^{\log n}\,T(n/2^{\log n}+2)+\sum_{i=0}^{\log n-1}(3^{i\cdot}10(n/2^i)+2)$

$\leq 2^{\log 3 \log n}\,T(3)+10\sum_{i=0}^{\log n-1}(3^{i\cdot}(n/2^i)+2)$

$\leq 9n^{\log 3}+10\sum_{i=0}^{\log n-1}(3^i/2^i)+2\log n$, da $T(3)\leq 9$

Algorithmen auf Zahlen

Multiplikation - Rekursionsgleichung

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Rekursionsgleichung

$$\leq 9n^{\log 3} + 10\sum_{i=0}^{\log n - 1}(3^i/2^i) + 2 \log n, \text{ da } T(3) \leq 9$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Rekursionsgleichung

$$\leq 9n^{\log 3} + 10\sum_{i=0}^{\log n - 1}(3^i/2^i) + 2 \log n, \text{ da } T(3) \leq 9$$

$$\leq 9n^{\log 3} + 10n((3/2)^{\log n} - 1)/(3/2) - 1) + 2 \log n$$

Algorithmen auf Zahlen

Multiplikation - Rekursionsgleichung

$$\leq 9n^{\log 3} + 10\sum_{i=0}^{\log n - 1}(3^i/2^i) + 2 \log n, \text{ da } T(3) \leq 9$$

$$\leq 9n^{\log 3} + 10n((3/2)^{\log n} - 1)/(3/2) - 1) + 2 \log n$$

$$\leq 9n^{\log 3} + 20n \cdot 2^{\log 1{,}5 \log n} - 1 + 2 \log n$$

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Rekursionsgleichung

$$\leq 9n^{\log 3}+10\sum_{i=0}^{\log n-1}(3^i/2^i)+2\log n, \text{ da } T(3)\leq 9$$

$$\leq 9n^{\log 3}+10n((3/2)^{\log n}-1)/(3/2)-1)+2\log n$$

$$\leq 9n^{\log 3}+20n\cdot 2^{\log 1{,}5 \log n}-1+2\log n$$

$$\leq 9n^{\log 3}+20n^{\log 3}+2\log n$$

Algorithmen auf Zahlen

Multiplikation - Rekursionsgleichung

$\leq 9n^{\log 3}+10\sum_{i=0}^{\log n-1}(3^i/2^i)+2 \log n$, da $T(3)\leq 9$

$\leq 9n^{\log 3}+10n((3/2)^{\log n}-1)/(3/2)-1)+2 \log n$

$\leq 9n^{\log 3}+20n\cdot 2^{\log 1,5 \log n}-1+2 \log n$

$\leq 9n^{\log 3}+20n^{\log 3}+2 \log n$

$\leq 29n^{\log 3}+2 \log n=O(n^{\log 3})$ (log 3 ≈ 1.585).

Algorithmen auf Zahlen

Multiplikation - Rekursionsgleichung

$\leq 9n^{\log 3}+10\sum_{i=0}^{\log n-1}(3^i/2^i)+2 \log n$, da $T(3)\leq 9$

$\leq 9n^{\log 3}+10n((3/2)^{\log n}-1)/(3/2)-1)+2 \log n$

$\leq 9n^{\log 3}+20n\cdot 2^{\log 1,5 \log n}-1+2 \log n$

$\leq 9n^{\log 3}+20n^{\log 3}+2 \log n$

$\leq 29n^{\log 3}+2 \log n=O(n^{\log 3})$ (log 3 ≈ 1.585).

Algorithmen auf Zahlen

Multiplikation - Rekursionsgleichung

$\leq 9n^{\log 3}+10\sum_{i=0}^{\log n-1}(3^i/2^i)+2 \log n$, da $T(3)\leq 9$

$\leq 9n^{\log 3}+10n((3/2)^{\log n}-1)/(3/2)-1)+2 \log n$

$\leq 9n^{\log 3}+20n\cdot 2^{\log 1,5 \log n}-1+2 \log n$

$\leq 9n^{\log 3}+20n^{\log 3}+2 \log n$

$\leq 29n^{\log 3}+2 \log n=O(n^{\log 3})$ (log 3 ≈ 1.585).

Satz

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Rekursionsgleichung

$\leq 9n^{\log 3}+10\sum_{i=0}^{\log n-1}(3^i/2^i)+2 \log n$, da $T(3)\leq 9$

$\leq 9n^{\log 3}+10n((3/2)^{\log n}-1)/(3/2)-1)+2 \log n$

$\leq 9n^{\log 3}+20n\cdot 2^{\log 1,5 \log n}-1+2 \log n$

$\leq 9n^{\log 3}+20n^{\log 3}+2 \log n$

$\leq 29n^{\log 3}+2 \log n=O(n^{\log 3})$ (log 3 ≈ 1.585).

Satz

Zwei n-stellige Binärzahlen können mit

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Rekursionsgleichung

$\leq 9n^{\log 3}+10\sum_{i=0}^{\log n-1}(3^i/2^i)+2 \log n$, da $T(3)\leq 9$

$\leq 9n^{\log 3}+10n((3/2)^{\log n}-1)/(3/2)-1)+2 \log n$

$\leq 9n^{\log 3}+20n\cdot 2^{\log 1,5 \log n}-1+2 \log n$

$\leq 9n^{\log 3}+20n^{\log 3}+2 \log n$

$\leq 29n^{\log 3}+2 \log n=O(n^{\log 3})$ (log 3 ≈ 1.585).

Satz

Zwei n-stellige Binärzahlen können mit

$$29n^{\log 3}+2 \log n=O(n^{\log 3})$$

Algorithmen auf Zahlen

Multiplikation - Rekursionsgleichung

$\leq 9n^{\log 3}+10\sum_{i=0}^{\log n-1}(3^i/2^i)+2 \log n$, da $T(3)\leq 9$

$\leq 9n^{\log 3}+10n((3/2)^{\log n}-1)/(3/2)-1)+2 \log n$

$\leq 9n^{\log 3}+20n\cdot 2^{\log 1,5 \log n}-1+2 \log n$

$\leq 9n^{\log 3}+20n^{\log 3}+2 \log n$

$\leq 29n^{\log 3}+2 \log n=O(n^{\log 3})$ (log 3 ≈ 1.585).

Satz

Zwei n-stellige Binärzahlen können mit

$$29n^{\log 3}+2 \log n=O(n^{\log 3})$$

vielen Bit-Operationen multipliziert werden.

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Drawback

$$T(n)=29n^{\log 3}+2 \log n=O(n^{\log 3})$$

- Wann ist dieser Ausdruck überhaupt besser als das traditionelle n^2 bei Schulmethode?
- $$29n^{\log 3}+2 \log n<n^2$$

  gilt erst ab etwa n=500-stelligen Binärzahlen.
- Für n<500 ist die Schulmethode besser.

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Drawback

- Verbesserung: Breche den Algorithmus bei Binärzahlen der Länge 2^m+2 ab und gehe von dort zur Schulmethode über.
- Wie findet man den optimalen Umschaltzeitpunkt:

  ...
  $\leq 3^k T(n/2^k+2)+\sum_{i=0}^{k-1}(3^i \cdot 10(n/2^i)+2)$
  Rechne von hier für k=log n - m weiter:
  ...
- Ergebnis nach längerer Rechnerei: optimaler Umschaltzeitpunkt: Länge der Binärzahlen zwischen 10 und 18.
- Konstante sinkt dann auf etwa 10.

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - Rekursionsgleichung

Satz
Zwei n-stellige Binärzahlen können mit

$$10n^{\log 3}+2 \log n = O(n^{\log 3})$$

vielen Bit-Operationen multipliziert werden.

Algorithmus schlägt Schulmethode ab etwa n=50.

35 Jahre lang bester Algorithmus:

Satz (A. Schönhage, V. Strassen, 1971)
Zwei n-stellige Binärzahlen können mit

$$O(n \log n \log \log n)$$

vielen Bit-Operationen multipliziert werden.

Algorithmen auf Zahlen
Multiplikation - bestes Ergebnis zur Zeit

Aktuell bester Algorithmus:

Satz (M. Fürer, 2007)
Zwei n-stellige Binärzahlen können mit

$$O(n \log n \, 2^{O(\log^* n)})$$

vielen Bit-Operationen multipliziert werden.

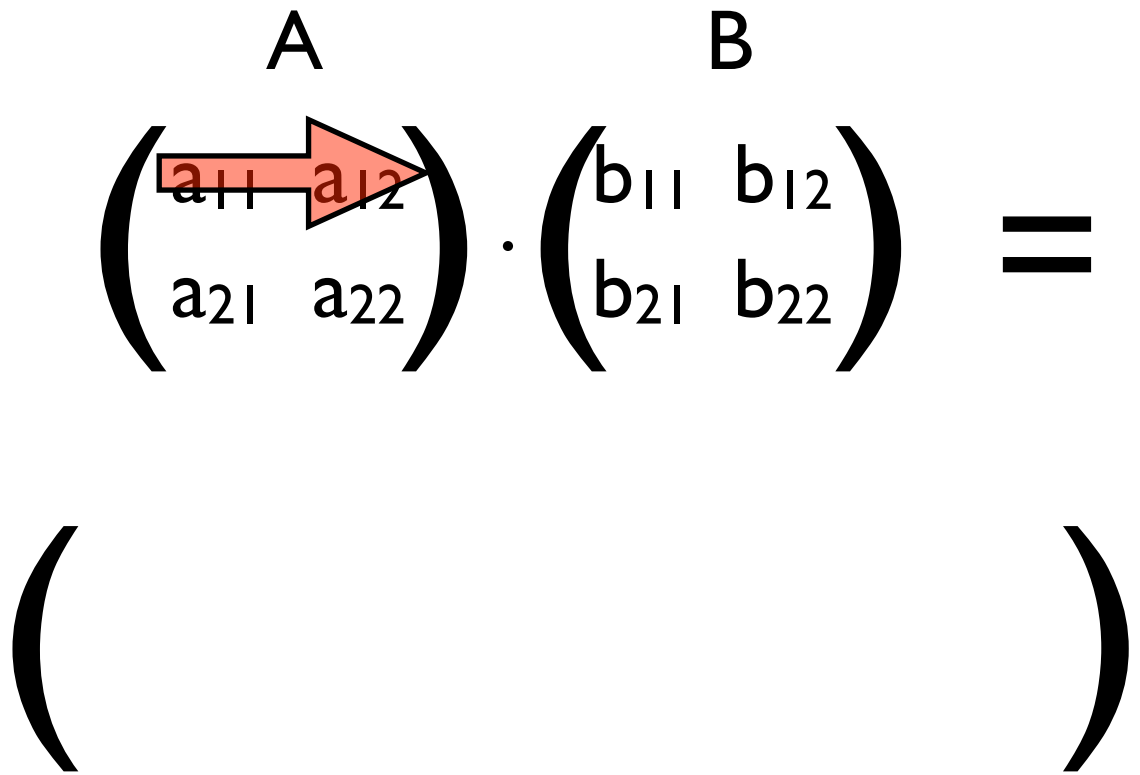
Algorithmen auf Zahlen

Matrixmultiplikation

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \cdot \underset{B}{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}} = \underset{C}{\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}}$$

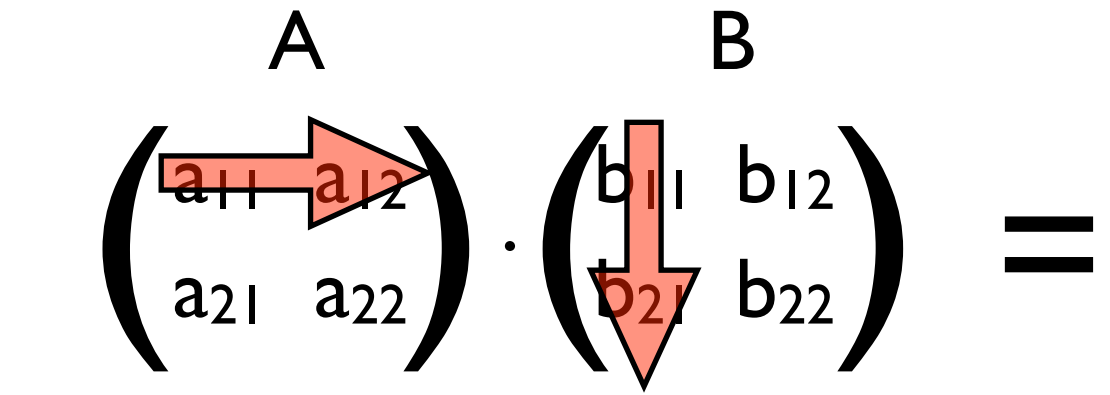
Algorithmen auf Zahlen

Matrixmultiplikation



Algorithmen auf Zahlen

Matrixmultiplikation

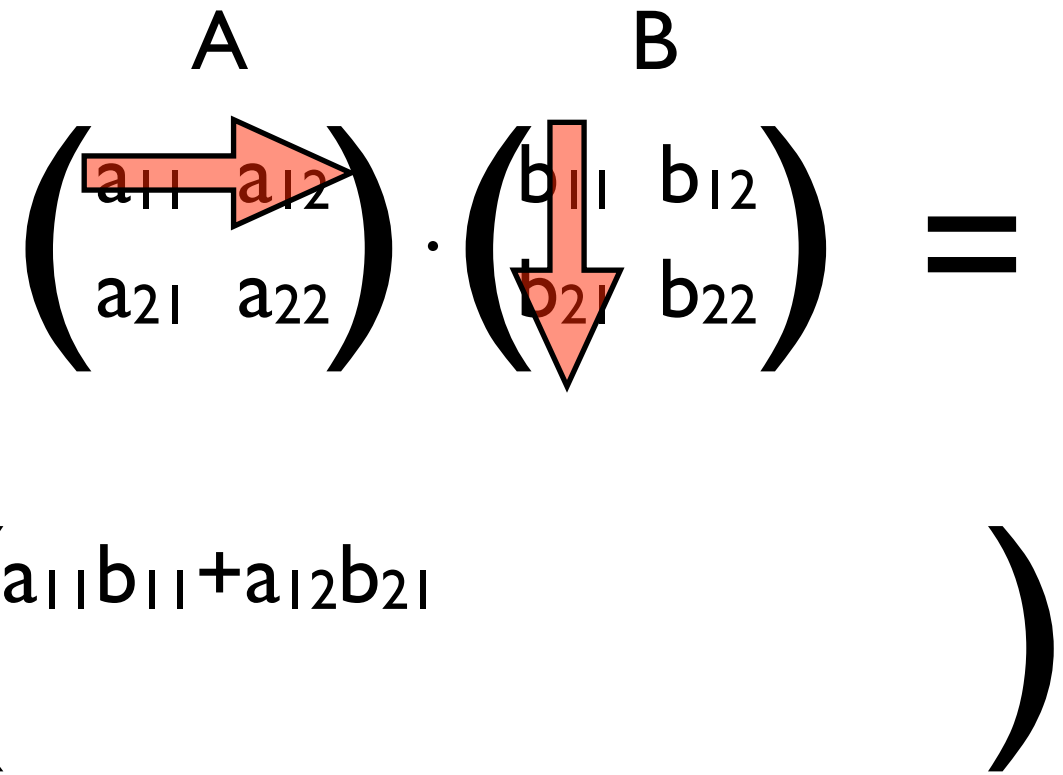


$$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

C

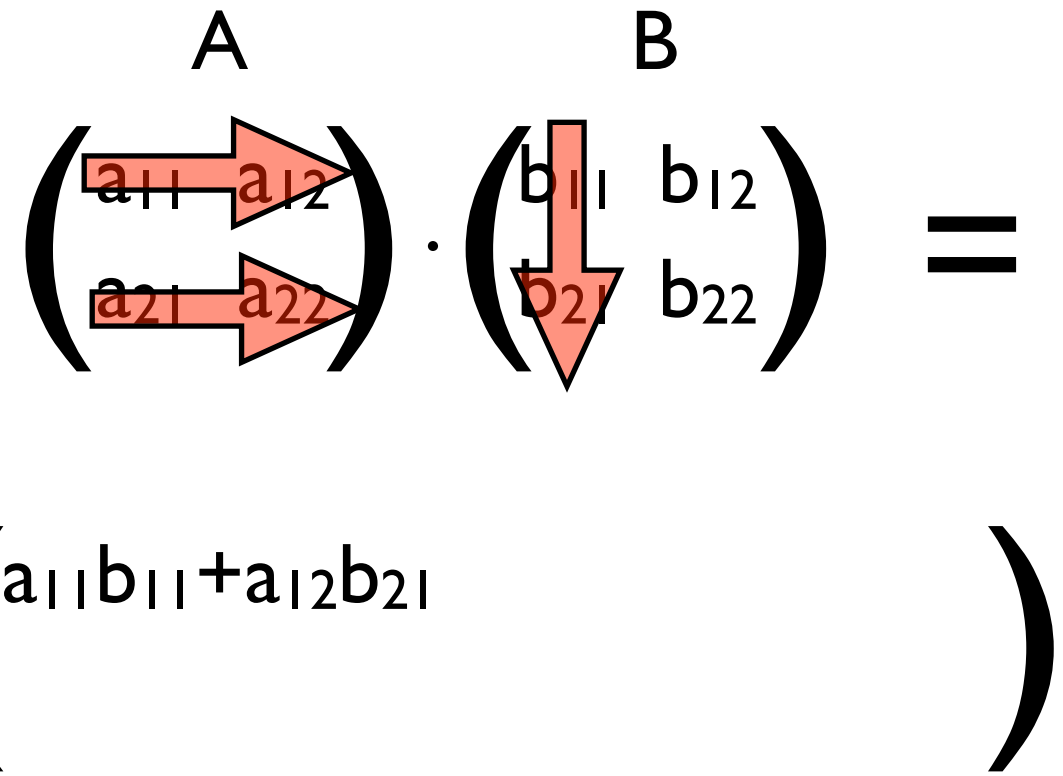
Algorithmen auf Zahlen

Matrixmultiplikation



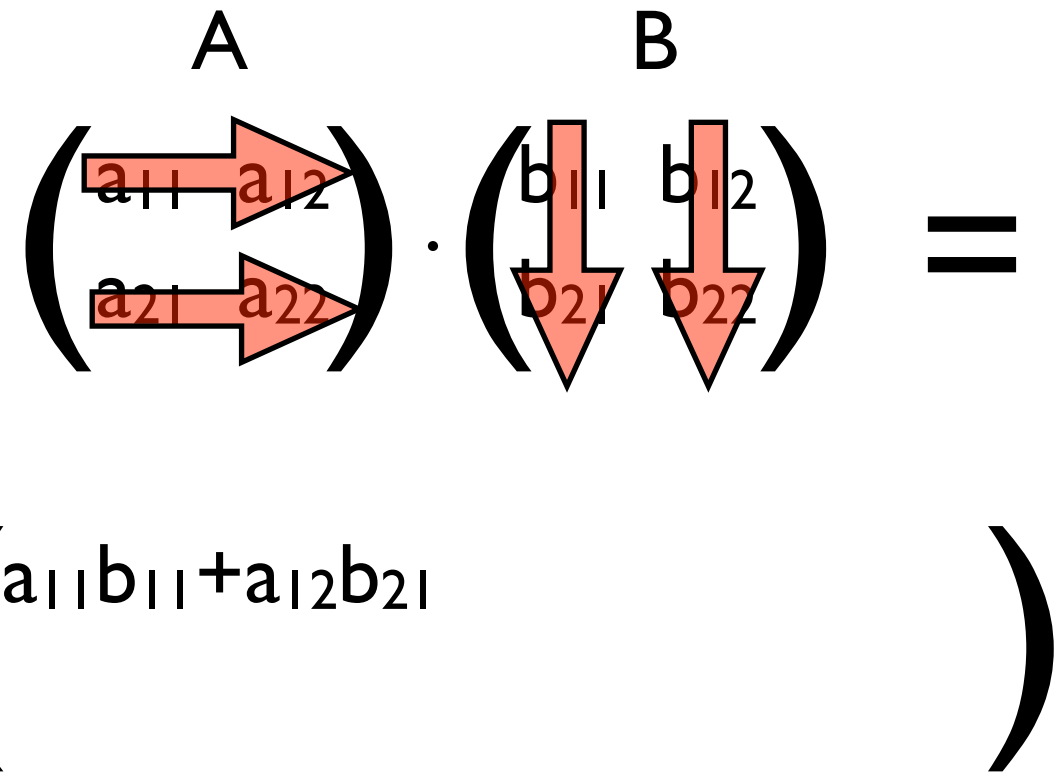
Algorithmen auf Zahlen

Matrixmultiplikation



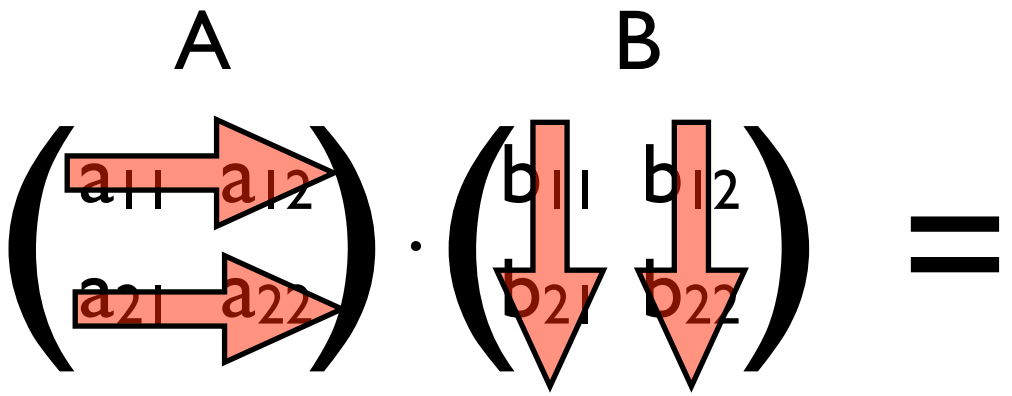
Algorithmen auf Zahlen

Matrixmultiplikation



Algorithmen auf Zahlen

Matrixmultiplikation

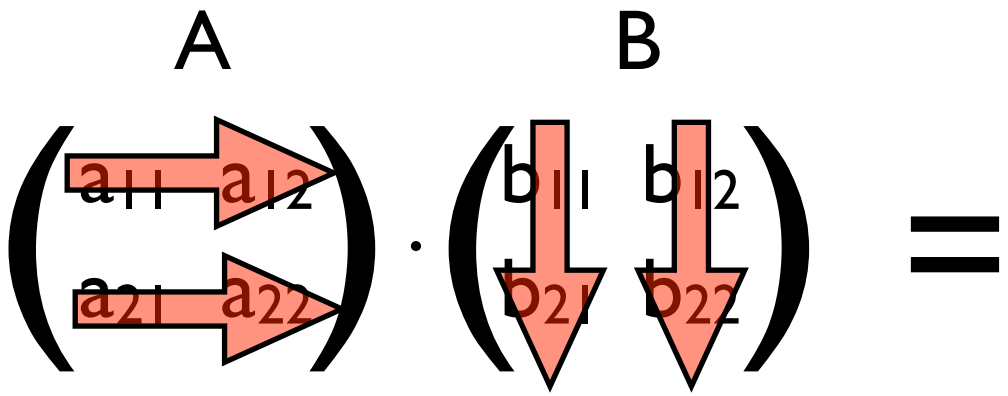


$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & \\ & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

C

Algorithmen auf Zahlen

Matrixmultiplikation

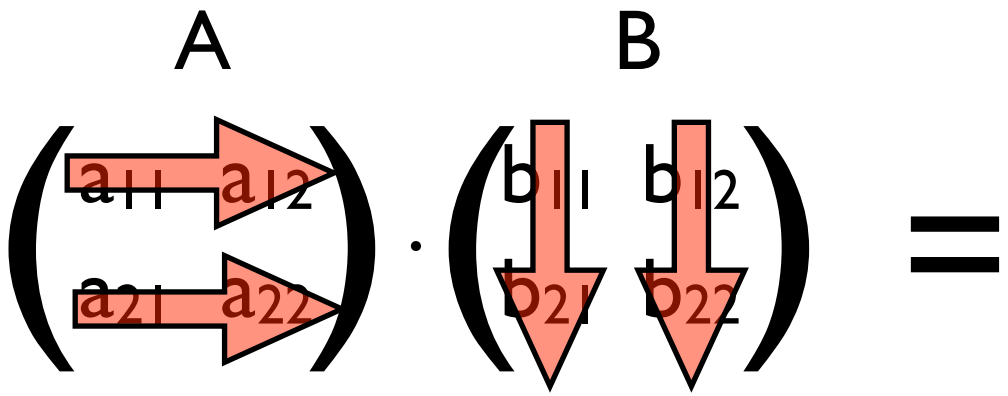


$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

C

Algorithmen auf Zahlen

Matrixmultiplikation



$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

C

Algorithmen auf Zahlen
Matrixmultiplikation

- Gegeben zwei nxn-Matrizen A und B.
- Gesucht: Matrix $C=A \cdot B$
- Anwendungen in allen Gebieten:
  - Wegeprobleme in Graphen
  - Physik (riesige Matrizen)
  - lineare Algebra

Algorithmen auf Zahlen
Matrixmultiplikation - Schulmethode

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+...+a_{in-1}b_{n-1j}+a_{in}b_{nj}$$

- je Matrixelement c_{ij} nötig: n Multiplikationen und n-1 Additionen
- n^2 Matrixelemente sind zu berechnen:

$$n^2(n+n-1)=2n^3-n^2=O(n^3)$$

Operationen.

Algorithmen auf Zahlen
Matrixmultiplikation - geniale Ideen

- Divide-and-conquer-Verfahren
- intelligente Berechnungsmethode, die Multiplikationen auf Kosten von Additionen spart

- Generalannahme: n *Zweierpotenz*, sonst Matrix auf nächste Zweierpotenz mit Nullen erweitern

Algorithmen auf Zahlen
Matrixmultiplikation - Vorgehen

Divide-and-conquer-Verfahren

- Teile A und B in je 4 gleichgroße n/2xn/2 Teilmatrizen auf:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

und berechne

$$C_{11} = A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21}$$

$$C_{12} = A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22}$$

$$C_{21} = A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21}$$

$$C_{22} = A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22}$$

Algorithmen auf Zahlen
Matrixmultiplikation - Vorgehen

Divide-and-conquer-Verfahren

- Teile A und B in je 4 gleichgroße n/2xn/2 Teilmatrizen auf:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

und berechne

$$C_{11} = A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21}$$
$$C_{12} = A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22}$$
$$C_{21} = A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21}$$
$$C_{22} = A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22}$$

8 Matrixmultiplikationen von n/2xn/2-Matrizen und 4 Matrixadditionen

Algorithmen auf Zahlen
Matrixmultiplikation - Vorgehen

- Laufzeit:

$$T(n)=8T(n/2)+n^2$$

$$T(1)=1$$

- Lösung leider (Selbst nachweisen!):

$$T(n)=O(n^3)$$

- kein Gewinn gegenüber Schulmethode

Algorithmen auf Zahlen
Matrixmultiplikation - Strassen-Algor.

- Spare durch geschickte Zwischenrechnungen eine Multiplikation ein:
- Berechne:

$M_1 = (A_{12}-A_{22})(B_{21}+B_{22})$ $\quad M_2 = (A_{11}+A_{22})(B_{11}+B_{22})$
$M_3 = (A_{11}-A_{21})(B_{11}+B_{12})$ $\quad M_4 = (A_{11}+A_{12})B_{22}$
$M_5 = A_{11}(B_{12}-B_{22})$ $\quad M_6 = A_{22}(B_{21}-B_{11})$
$M_7 = (A_{21}+A_{22})B_{11}$

und dann:

$C_{11} = M_1+M_2-M_4+M_6$ $\quad C_{12} = M_4+M_5$
$C_{21} = M_6+M_7$ $\quad C_{22} = M_2-M_3+M_5-M_7.$

Algorithmen auf Zahlen
Matrixmultiplikation - Strassen-Algor.

- Spare durch geschickte Zwischenrechnungen eine Multiplikation ein:
- Berechne:

7 Multiplikationen

$M_1 = (A_{12}-A_{22})(B_{21}+B_{22})$
$M_2 = (A_{11}+A_{22})(B_{11}+B_{22})$
$M_3 = (A_{11}-A_{21})(B_{11}+B_{12})$
$M_4 = (A_{11}+A_{12})B_{22}$
$M_5 = A_{11}(B_{12}-B_{22})$
$M_6 = A_{22}(B_{21}-B_{11})$
$M_7 = (A_{21}+A_{22})B_{11}$

und dann:

$C_{11} = M_1+M_2-M_4+M_6$
$C_{12} = M_4+M_5$
$C_{21} = M_6+M_7$
$C_{22} = M_2-M_3+M_5-M_7.$

Algorithmen auf Zahlen
Matrixmultiplikation - Strassen-Algor.

- Spare durch geschickte Zwischenrechnungen eine Multiplikation ein:
- Berechne:

$M_1 = (A_{12}-A_{22})(B_{21}+B_{22})$ $\quad M_2 = (A_{11}+A_{22})(B_{11}+B_{22})$
$M_3 = (A_{11}-A_{21})(B_{11}+B_{12})$ $\quad M_4 = (A_{11}+A_{12})B_{22}$
$M_5 = A_{11}(B_{12}-B_{22})$ $\quad M_6 = A_{22}(B_{21}-B_{11})$
$M_7 = (A_{21}+A_{22})B_{11}$

und dann:

$C_{11} = M_1+M_2-M_4+M_6$ $\quad C_{12} = M_4+M_5$
$C_{21} = M_6+M_7$ $\quad C_{22} = M_2-M_3+M_5-M_7.$

Algorithmen auf Zahlen
Matrixmultiplikation - Strassen-Algor.

- Spare durch geschickte Zwischenrechnungen eine Multiplikation ein:
- Berechne:

18 Additionen

$M_1 = (A_{12}-A_{22})(B_{21}+B_{22})$ $\quad M_2 = (A_{11}+A_{22})(B_{11}+B_{22})$

$M_3 = (A_{11}-A_{21})(B_{11}+B_{12})$ $\quad M_4 = (A_{11}+A_{12})B_{22}$

$M_5 = A_{11}(B_{12}-B_{22})$ $\quad M_6 = A_{22}(B_{21}-B_{11})$

$M_7 = (A_{21}+A_{22})B_{11}$

und dann:

$C_{11} = M_1+M_2-M_4+M_6$ $\quad C_{12} = M_4+M_5$

$C_{21} = M_6+M_7$ $\quad C_{22} = M_2-M_3+M_5-M_7.$

Algorithmen auf Zahlen
Matrixmultiplikation - Strassen-Algor.

- Spare durch geschickte Zwischenrechnungen eine Multiplikation ein:
- Berechne:

$M_1 = (A_{12}-A_{22})(B_{21}+B_{22})$ $\quad M_2 = (A_{11}+A_{22})(B_{11}+B_{22})$
$M_3 = (A_{11}-A_{21})(B_{11}+B_{12})$ $\quad M_4 = (A_{11}+A_{12})B_{22}$
$M_5 = A_{11}(B_{12}-B_{22})$ $\quad M_6 = A_{22}(B_{21}-B_{11})$
$M_7 = (A_{21}+A_{22})B_{11}$

und dann:

$C_{11} = M_1+M_2-M_4+M_6$ $\quad C_{12} = M_4+M_5$
$C_{21} = M_6+M_7$ $\quad C_{22} = M_2-M_3+M_5-M_7.$

Algorithmen auf Zahlen
Matrixmultiplikation - Laufzeit

- Laufzeit:

$$T(n)=7T(n/2)+18(n/2)^2=7T(n/2)+9n^2/2$$

mit $T(1)=1$

- Lösung durch Abwicklung der Rekursion

Algorithmen auf Zahlen

Matrixmultiplikation - Laufzeit

Algorithmen auf Zahlen
Matrixmultiplikation - Laufzeit

$T(n)=7T(n/2)+9n^2/2$

Algorithmen auf Zahlen

Matrixmultiplikation - Laufzeit

$$T(n)=7T(n/2)+9n^2/2$$
$$=7\cdot(7T(n/4)+(9/2)(n/2)^2)+9n^2/2$$

Algorithmen auf Zahlen

Matrixmultiplikation - Laufzeit

$$T(n)=7T(n/2)+9n^2/2$$
$$=7\cdot(7T(n/4)+(9/2)(n/2)^2)+9n^2/2$$
$$=7^2\,T(n/4)+7\cdot(9/2)(n/2)^2)+9n^2/2$$

Algorithmen auf Zahlen
Matrixmultiplikation - Laufzeit

$T(n)=7T(n/2)+9n^2/2$

$=7\cdot(7T(n/4)+(9/2)(n/2)^2)+9n^2/2$

$=7^2\,T(n/4)+7\cdot(9/2)(n/2)^2)+9n^2/2$

Nach k Iterationen erhält man:

Algorithmen auf Zahlen
Matrixmultiplikation - Laufzeit

$T(n)=7T(n/2)+9n^2/2$

$=7\cdot(7T(n/4)+(9/2)(n/2)^2)+9n^2/2$

$=7^2\,T(n/4)+7\cdot(9/2)(n/2)^2)+9n^2/2$

Nach k Iterationen erhält man:

$=7^k\,T(n/2^k)+\Sigma_{i=0}^{k-1}\;7^i\cdot(9/2)(n/2^i)^2$

Algorithmen auf Zahlen
Matrixmultiplikation - Laufzeit

$T(n)=7T(n/2)+9n^2/2$

$=7\cdot(7T(n/4)+(9/2)(n/2)^2)+9n^2/2$

$=7^2\,T(n/4)+7\cdot(9/2)(n/2)^2)+9n^2/2$

Nach k Iterationen erhält man:

$=7^k\,T(n/2^k)+\Sigma_{i=0}^{k-1}\ 7^i\cdot(9/2)(n/2^i)^2$

mit k=log n erhält man

Algorithmen auf Zahlen
Matrixmultiplikation - Laufzeit

$T(n)=7T(n/2)+9n^2/2$

$=7\cdot(7T(n/4)+(9/2)(n/2)^2)+9n^2/2$

$=7^2\,T(n/4)+7\cdot(9/2)(n/2)^2)+9n^2/2$

Nach k Iterationen erhält man:

$=7^k\,T(n/2^k)+\Sigma_{i=0}^{k-1}\;7^i\cdot(9/2)(n/2^i)^2$

mit k=log n erhält man

$=7^{\log n}\,T(1)+\Sigma_{i=0}^{\log n-1}\;\;(7/4)^i$

Algorithmen auf Zahlen
Matrixmultiplikation - Laufzeit

$T(n)=7T(n/2)+9n^2/2$

$=7\cdot(7T(n/4)+(9/2)(n/2)^2)+9n^2/2$

$=7^2\,T(n/4)+7\cdot(9/2)(n/2)^2)+9n^2/2$

Nach k Iterationen erhält man:

$=7^k\,T(n/2^k)+\Sigma_{i=0}^{k-1}\;7^i\cdot(9/2)(n/2^i)^2$

mit k=log n erhält man

$=7^{\log n}\,T(1)+\Sigma_{i=0}^{\log n-1}\;\;(7/4)^i$

$=2^{\log 7 \log n}+(9/2)n^2\;\Sigma_{i=0}^{\log n-1}\;\;(7/4)^i$

Algorithmen auf Zahlen
Matrixmultiplikation - Laufzeit

$T(n)=7T(n/2)+9n^2/2$

$=7\cdot(7T(n/4)+(9/2)(n/2)^2)+9n^2/2$

$=7^2\,T(n/4)+7\cdot(9/2)(n/2)^2)+9n^2/2$

Nach k Iterationen erhält man:

$=7^k\,T(n/2^k)+\Sigma_{i=0}^{k-1}\ 7^i\cdot(9/2)(n/2^i)^2$

mit k=log n erhält man

$=7^{\log n}\,T(1)+\Sigma_{i=0}^{\log n-1}\ \ (7/4)^i$

$=2^{\log 7 \log n}+(9/2)n^2\ \Sigma_{i=0}^{\log n-1}\ \ (7/4)^i$

$=n^{\log 7}+(9/2)n^2\ (((7/4)^{\log n}-1)/(7/4-1)$

Algorithmen auf Zahlen
Matrixmultiplikation - Laufzeit

$T(n)=7T(n/2)+9n^2/2$

$=7\cdot(7T(n/4)+(9/2)(n/2)^2)+9n^2/2$

$=7^2\,T(n/4)+7\cdot(9/2)(n/2)^2)+9n^2/2$

Nach k Iterationen erhält man:

$=7^k\,T(n/2^k)+\Sigma_{i=0}^{k-1}\ 7^i\cdot(9/2)(n/2^i)^2$

mit k=log n erhält man

$=7^{\log n}\,T(1)+\Sigma_{i=0}^{\log n-1}\ \ (7/4)^i$

$=2^{\log 7 \log n}+(9/2)n^2\ \Sigma_{i=0}^{\log n-1}\ \ (7/4)^i$

$=n^{\log 7}+(9/2)n^2\ (((7/4)^{\log n}-1)/(7/4-1)$

$\leq n^{\log 7}+(9/2)n^2\ (4/3)\ n^{\log 7-\log 4}$

Algorithmen auf Zahlen
Matrixmultiplikation - Laufzeit

$T(n)=7T(n/2)+9n^2/2$

$=7\cdot(7T(n/4)+(9/2)(n/2)^2)+9n^2/2$

$=7^2\,T(n/4)+7\cdot(9/2)(n/2)^2)+9n^2/2$

Nach k Iterationen erhält man:

$=7^k\,T(n/2^k)+\Sigma_{i=0}^{k-1}\ 7^i\cdot(9/2)(n/2^i)^2$

mit k=log n erhält man

$=7^{\log n}\,T(1)+\Sigma_{i=0}^{\log n-1}\ \ (7/4)^i$

$=2^{\log 7 \log n}+(9/2)n^2\ \Sigma_{i=0}^{\log n-1}\ \ (7/4)^i$

$=n^{\log 7}+(9/2)n^2\ (((7/4)^{\log n}-1)/(7/4-1)$

$\leq n^{\log 7}+(9/2)n^2\ (4/3)\ n^{\log 7-\log 4}$

$\leq\ n^{\log 7}+6\ n^{\log 7}$

Algorithmen auf Zahlen
Matrixmultiplikation - Laufzeit

$T(n)=7T(n/2)+9n^2/2$

$=7\cdot(7T(n/4)+(9/2)(n/2)^2)+9n^2/2$

$=7^2\,T(n/4)+7\cdot(9/2)(n/2)^2)+9n^2/2$

Nach k Iterationen erhält man:

$=7^k\,T(n/2^k)+\Sigma_{i=0}^{k-1}\ 7^i\cdot(9/2)(n/2^i)^2$

mit k=log n erhält man

$=7^{\log n}\,T(1)+\Sigma_{i=0}^{\log n-1}\ \ (7/4)^i$

$=2^{\log 7 \log n}+(9/2)n^2\ \Sigma_{i=0}^{\log n-1}\ \ (7/4)^i$

$=n^{\log 7}+(9/2)n^2\ (((7/4)^{\log n}-1)/(7/4-1)$

$\leq n^{\log 7}+(9/2)n^2\ (4/3)\ n^{\log 7-\log 4}$

$\leq\ n^{\log 7}+6\ n^{\log 7}$

$=7\ n^{\log 7}\ \approx\ \ 7n^{2.81}$

Algorithmen auf Zahlen
Matrixmultiplikation - Ergebnis

Satz:

Der Algorithmus von Strassen benötigt zur Multiplikation zweier nxn-Matrizen $7n^{\log 7}$ viele arithmetische Operationen.

Nachrechnen ergibt: Strassen-Algorithmus schlägt Schulmethode ab $n \geq 700$.

Algorithmen auf Zahlen
Matrixmultiplikation - Verbesserungen

- 7 Multiplikationen und **15** Additionen ⇒

  Strassen-Algorithmus schlägt Schulmethode ab $n \geq 310$

Algorithmen auf Zahlen
Matrixmultiplikation - Verbesserungen

- Gehe zur Schulmethode über, wenn diese effizienter ist als der Strassen-Algorithmus. Ab welcher Matrizengröße $2^m x 2^m$ empfiehlt sich das?
- Wie oben rechnen:

  $= 7^k T(n/2^k) + \sum_{i=0}^{k-1} 7^i \cdot (9/2)(n/2^i)^2$

  mit k=log n-m weiterrechnen und

  bestmögliches m ermitteln
- Ergebnis: Umschaltzeitpunkt zwischen 8 und 16.
- Konstante sinkt dann auf etwa 4.

Algorithmen auf Zahlen
Matrixmultiplikation - Ergebnis

Satz:

Der Algorithmus von Strassen benötigt zur Multiplikation zweier nxn-Matrizen $4n^{\log 7}$ viele arithmetische Operationen, wenn man bei kleinen Matrizen auf die Schulmethode umsteigt.

Nachrechnen ergibt: Strassen-Algorithmus schlägt Schulmethode ab $n \geq 40$.

Algorithmen auf Zahlen

Matrixmultiplikation - state of the art

Jahr	Autoren	Laufzeit
1969	Strassen	$O(n^{2,808})$
1979	Pan	$O(n^{2,781})$
1979	Bin, Capovani, Lotti, Romani	$O(n^{2,7799})$
1979	Schönhage	$O(n^{2,548})$
1979	Pan	$O(n^{2,522})$
1982	Coppersmith, Winograd	$O(n^{2,496})$
1982	Strassen	$O(n^{2,47})$
1982	Coppersmith, Winograd	$O(n^{2,38})$

Algorithmen wegen der Konstanten
nur von theoretischem Interesse