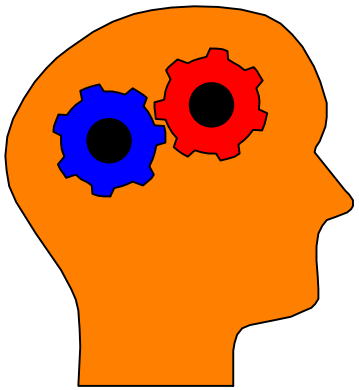
Prädikatenlogik



$$\forall X_1 : \ldots : \forall X_k : (\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \ldots \vee \neg A_m \vee B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_n)$$

Syntax der Prädikatenlogik

Term: Variable | konstante | funktor(Term1, Term2, ...)

Prädikat: prädikatssymbol(Term1, Term2, ...)

Bsp. p(f(a,b),X,Y)

Formel: mit F, G Formeln und X eine Variable:
- ein Prädikat,
- die Negation einer Formel $\neg$F
- die Konjunktion bzw. Diskunktion von Formeln (F $\wedge$G) bzw. (F $\vee$G)
- eine Existenzaussage $\exists$X: F
- eine Allaussage $\forall$X: F
- die Implikation von Formeln F$\Rightarrow$G

Bsp. $\forall$X: $\forall$ Y: $\neg$p(f(X,Y) $\vee$ q(X,Y)

Klauseln

- Eine Variable X heißt **gebunden**, wenn es in der Formel F eine Teilformel der Form $(\forall X{:}G)$ oder $(\exists X{:}G)$ gibt und X nur in G vorkommt.
- Sind alle Variablen in einer Formel gebunden, spricht man von einer **geschlossenen Formel**.
- Ein **Literal** L ist ein einzelnes Prädikat oder die Negation eines Prädikats. Ein Literal heißt negativ, wenn es die Negation eines Prädikats ist.
- Eine **Klausel** ist eine geschlossene Formel der Form

  $\forall X_1{:}\ \forall X_2{:}\ \ldots\ \forall X_k{:}\ (L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n)$

Logisches Programm

Seien Xi Variablen, die in den Literalen Ai und Bj vorkommen:

$$\forall X_1: ...: \forall X_k: (\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee ... \vee \neg A_m \vee B_1 \vee B_2 \vee ... \vee B_n)$$

$$<=> \forall X_1: ...: \forall X_k: (A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_m) \Rightarrow (B_1 \vee B_2 \vee ... \vee B_n)$$

Kurzschreibweise: $\mathbf{A_1, A_2, ... , A_m \Rightarrow B_1, B_2, ... , B_n}$

Programmklausel: $A_1, A_2, ... , A_m \Rightarrow B$

Fakten: $\Rightarrow B$

Anfrage: $A_1, A_2, ... , A_m \Rightarrow$

leere Klausel • : $\Rightarrow$

Logisches Programm ist eine endliche Menge von Programmklauseln.

Deklarative Semantik

Bsp. $\forall X: p(f(X,a),X)$

Komponenten einer Interpretation von Formeln:

1. Universum: (nichtleere) Menge von Objekten
2. Jeder Konstanten wird genau ein Element des Universums zugeordnet
3. Jedem n-stelligen Funktor wird genau eine Funktion zugeordnet, die jeweils n Werte des Universums auf einen Wert des Universums abbildet.
4. Jedem n-stelligen Prädikat wird genau eine Funktion zugeordnet, die jeweils n Werte des Universums auf einen boolschen Wert "wahr" oder "falsch" abbildet.

Bsp.	Universum:	natürliche Zahlen	
	a:	1	% die natürliche Zahl 1
	f:	*	% Multiplikation zweier natürlicher Zahlen
	p:	=	% Gleichheit auf den nat. Zahlen

*Für alle natürlichen Zahlen, die anstelle von X eingesetzt werden, gilt: X*1=X*

Modell: Interpretation, die einer geschlossenen Formel eine wahre Aussage zuordnet

Variablenbelegung: $\{X_1/e_1, X_2/e_2, ...\}$ mit $e_i \in$ Universum und $X_i \in$ Variablen der Formel

Eine Formel $p(T_1, ... T_n)$ bei geg. Interpretation u. Belegung heißt:

- wahr, wenn das zu p zugeordnete Prädikat die Werte $t_1, ... , t_n$ auf „wahr“ abbildet (t_1 berechnet sich aus dem Term T_1)
- erfüllbar, wenn es ein Modellfür diese Formel gibt
- allgemeingültig, wenn jede Interpretation der Formel ein Modell ist
- widerspruchsvoll, wenn sie nicht erfüllbar ist