Einführung in die Aussagenlogik

R. Golecki / J. Jungmann

August 1990

Inhaltsverzeichnis

1 Aussagen

In diesem Skript wird als elementarste Theorie der formalen Logik die klassische Aussagenlogik vorgestellt. In ihr wird die Verknüpfung einfacher (kompletter) Aussagen zu komplexen, zusammengesetzten Aussagen betrachtet (etwa so, wie in der Chemie die Verbindung einzelner Atome zu komplexen Molekülen betrachtet wird). Der innere Aufbau einzelner Aussagen, z. B. aus Subjekt, Prädikat, usw. interessiert in diesem Zusammenhang nicht, solche Betrachtungen gehören zur Quantorenlogik (die — um im Bild zu bleiben — eher mit der Atomphysik zu vergleichen ist, also mit der Wissenschaft, die sich mit der Zusammensetzung der Atome aus kleineren Teilchen beschäftigt).

Aussagen sind deskriptive, also beschreibende Sätze wie z. B. „In München steht ein Hofbräuhaus“, „Der Eiffelturm ist 482m hoch“. Fragen („Wie spät ist es?“), normative, also auffordernde Sätze („Gib mir bitte den Zucker!“) und andere sprachliche Äußerungen („Huch!“) gehören nicht dazu. Wir übergehen das Problem, daß diese am Gebrauch der Sätze orientierte Unterscheidung nicht immer mit ihrer sprachlichen Form übereinstimmt (der beschreibende Satz „Ich habe kein Geld mehr“ kann auch als Aufforderung benutzt werden). Wesentlich für Aussagen ist, daß nur sie *wahr* bzw. *falsch* sein können.

Die Untersuchung, *ob* eine einfache, nicht zusammengesetzte Aussage wahr ist oder nicht, fällt nicht in den Bereich der formalen Logik. Das zu prüfen ist Aufgabe des Alltagsverstandes oder einzelner Wissenschaften. Auch die weitergehende Frage, was Aussagen wahr macht (das in der Philosophie bis heute heftig umstrittene Problem des Verhältnisses von Sprache und Wirklichkeit) lassen wir hier beiseite. Es wird lediglich vorausgesetzt, *daß* Aussagen wahr sein können. Bei der in diesem Skript vorgestellten Aussagenlogik wird allerdings eine noch viel weitergehende Voraussetzung gemacht:

> Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch.

D. h., daß erstens keine Aussage zugleich wahr und falsch sein kann[1] und daß zweitens damit auch alle Möglichkeiten ausgeschöpft sind, eine weitere (dritte) gibt es nicht (lat.: *tertium non datur*). Diese Voraussetzung, auch *Postulat der Wahrheitsdefinitheit* genannt, mag harmlos klingen und fast selbstverständlich erscheinen, tatsächlich aber determiniert sie den weiteren Aufbau der Aussagenlogik in sehr starker Weise. Durch sie werden ungewisse, unentscheidbare, (nur) wahrscheinliche usw. Aussagen ausgeschlossen (oder — je nach Standpunkt — es wird ausgeschlossen, daß es solche Aussagen gibt). Dieses Postulat läßt sich nicht beweisen, ihm liegt eine Entscheidung zugrunde. Eine ganze Reihe von Logikern hält diese Entscheidung zumindest bei bestimmten Anwendungsgebieten der Logik für nicht sinnvoll, es ergeben sich dann andere logische Theorien. Die Logik, die auf der oben genannten Voraussetzung aufbaut, heißt wahrheitsdefinite Aussagenlogik, häufig auch „klassische“ Aussagenlogik oder *zweiwertige* Aussagenlogik.

Da in der formalen Logik vom Inhalt einer Aussage abgesehen wird, ist es aus Vereinfachungs- und Präzisionsgründen sinnvoll, einzelne Aussagen durch die Buchstaben P, Q, R, ... zu symbolisieren. In dieser symbolischen Schreibweise kann man dann natürlich

[1] Es gibt selbstverständlich Sätze (z. B. „Es regnet jetzt hier.“), die in einer bestimmten Situation wahr, in einer anderen falsch sind. Mögliche Mehrdeutigkeiten lassen sich aber durch geeignete Zusatzangaben (wann und wo genau?) ausschließen.

erst recht nicht mehr prüfen, ob diese „Aussagen“ wahr oder falsch sind. Gemäß der oben gemachten Annahme gehen wir aber davon aus, daß sie entweder wahr oder falsch sind, und drücken das so aus, daß ihnen einer der beiden Wahrheitswerte „wahr“ (w) oder „falsch“ (f) zugeordnet wird. Zusammengefaßt: Aussagen im Sinne der wahrheitsdefiniten Aussagenlogik sind sprachliche Gebilde (Sätze), denen sinnvollerweise genau einer der beiden Wahrheitswerte w oder f zugeordnet werden kann.

2 Junktoren

In der Umgangssprache können durch Worte wie „und“, „weil“, „oder“, „während“, „trotzdem“, „aber“, „wenn ..., dann ...“, „deshalb“ usw. einfache, elementare Aussagen zu neuen, komplexen Aussagen verknüpft werden. Ein Beispiel: Herr Schneider behauptet: „Ich habe meinen Schulfreund Anton getroffen, während ich in Rom war“. Hier wüßte man sicher, daß die Gesamtaussage falsch ist, wenn wenigstens eine der Teilaussagen „Ich (Herr Schneider) habe Anton getroffen“ (P), bzw. „Ich (Herr Schneider) war in Rom“ (Q) falsch ist. Wenn man aber weiß, daß beide Teilaussagen wahr sind, kann man über die Wahrheit der Gesamtaussage nichts Sicheres sagen. Herr Schneider kann in Rom gewesen sein, und er kann auch seinen Schulfreund Anton getroffen haben, aber an einem anderen Ort zu einer anderen Zeit. Nun behauptet jemand: „Weder hat Herr Schneider seinen Schulfreund Anton getroffen, noch war er in Rom“. Hier ist der Fall einfacher: Wenn die beiden Teilaussagen P und Q falsch sind, dann ist die Gesamtaussage wahr, in allen anderen Fällen falsch. Anders als bei der mit „während“ gebildeten Aussage genügt es zur Beurteilung der zusammengesetzten Aussage, über die Wahrheit oder Falschheit der Teilaussagen bescheid zu wissen.

Dieser Unterschied ist für die Aussagenlogik sehr wichtig. Zur besseren Illustration soll ein weiteres Beispiel gegeben werden (es handelt sich hierbei um einen Auszug aus einem *Multiple-Choice*-Test; Quelle: Ärztliche Prüfung 1980):

> Aufgabentyp C: Kausale Verknüpfung
>
> Erläuterung: Dieser Aufgabentyp besteht aus drei Teilen:
> – Teil 1: Aussage 1
> – Teil 2: Aussage 2
> – Teil 3: Kausale Verknüpfung (weil)
>
> Jede der beiden Aussagen kann unabhängig von der anderen richtig oder falsch sein. Wenn beide Aussagen richtig sind, so kann die Verknüpfung durch „weil“ richtig oder falsch sein. Entnehmen Sie den richtigen Lösungsbuchstaben nach Prüfung der einzelnen Teile dem nachfolgenden Lösungsschema:

Antwort	Aussage 1	Aussage 2	Verknüpfung
A	richtig	richtig	richtig
B	richtig	richtig	falsch
C	richtig	falsch	—
D	falsch	richtig	—
E	falsch	falsch	—

> Ein Betriebsarzt unterliegt im Hinblick auf Berufskrankheiten nicht der betrieblichen Schweigepflicht,
>
> weil
>
> der Betriebsarzt zur Meldung von Berufskrankheiten an den Träger der Unfallversicherung oder an die für den medizinischen Arbeitsschutz zuständige Behörde verpflichtet ist.

Stellen Sie sich vor, Sie sitzen in der Prüfung und wissen, daß beide Teilaussagen richtig sind. Damit fallen die Antwortmöglichkeiten C, D und E aus. Nun kann es sein, daß der Betriebsarzt tatsächlich aus dem im zweiten Teilsatz angegebenen Grund nicht der Schweigepflicht unterliegt (Antwort A). Es kann aber auch sein, daß es dafür ganz andere Gründe gibt (Antwort B). Das Wissen, daß beide Teilsätze wahr sind, reicht für eine Entscheidung nicht. Es sind zusätzliche Informationen über den kausalen Zusammenhang beider Aussagen nötig.

Angenommen, die Teilsätze wären durch „und“ und nicht durch „weil“ verknüpft. Unter der Voraussetzung, daß beide Teilaussagen wahr sind, ist auch die mit „und“ gebildete Gesamtaussage sicher wahr, die Antwortmöglichkeit B kann es in dem abgeänderten Beispiel nicht mehr geben. Wenn hingegen mindestens eine der beiden Teilaussagen falsch ist, dann ist auch die Gesamtaussage sicher falsch. Es genügt also, den Wahrheitswert der Teilaussagen zu kennen, um die Wahrheit oder Falschheit der Gesamtaussage zu beurteilen. Weitere Informationen sind im Gegensatz zum zweiten Beispiel nicht nötig.

Wenn zwei Teilaussagen zu einer neuen Aussage verknüpft werden, gibt es bezüglich der Wahrheit oder Falschheit der Teilaussagen vier mögliche Fälle: beide wahr, erste wahr und zweite falsch, erste falsch und zweite wahr, beide falsch. Folgendes Schema faßt zusammen, was sich in diesen Fällen über den Wahrheitswert der Gesamtaussage sagen läßt, wenn man die Teilaussagen mit den „Bindewörtern“ weil, und, während, weder …, noch … verknüpft.

P	Q	P weil Q	P und Q	P während Q	weder P, noch Q
w	w	w/f	w	w/f	f
w	f	f	f	f	f
f	w	f	f	f	f
f	f	f	f	f	w

Bei „und“ und „weder …, noch …“ hängt der Wahrheitswert der Gesamtaussage nur von den Wahrheitswerten der Teilaussagen ab, bei „weil“ und „während“ sind zusätzliche inhaltliche Überlegungen nötig. Da in der Logik vom Inhalt abgesehen wird, kommt hier solchen Worten wie „und“ eine besondere Bedeutung zu. Nur bei ihnen ist es möglich, mittels keiner weiteren Information als der, daß die Teilaussagen entweder wahr oder falsch sind (also, daß es sich um Aussagen im Sinne der Aussagenlogik handelt), auch der Gesamtaussage eindeutig einen Wahrheitswert zuzuordnen (also wieder eine Aussage zu erhalten).

Wir definieren: Worte oder Zeichen, die Teilaussagen so zu einer Gesamtaussage verknüpfen, daß der Wahrheitswert der Gesamtaussage ausschließlich von den Wahrheitswerten der beteiligten Teilaussagen abhängt, heißen *Junktoren*. Wie wir oben gezeigt haben, sind „und“ und „weder . . . , noch . . . “ Beispiele für Junktoren, „weil“ und „während“ jedoch nicht.

2.1 Konjunktion, Adjunktion, Disjunktion

Der Junktor „und“ erscheint in der Umgangssprache oft nicht als Verknüpfung von Teilsätzen, sondern von einzelnen Worten, etwa in dem Satz „Anna und Berta spielen Klavier“. Dieser Satz kann aber sinngleich durch „Anna spielt Klavier und Berta spielt Klavier“ ersetzt werden. Die Verwendung von „und“ als Junktor ist dann deutlicher. Diese Ersetzung gelingt nicht immer. „Anna liebt sich und Berta liebt sich“ hat nicht den gleichen Sinn wie „Anna und Berta lieben sich“. Im letzten Satz wie auch im Satz „Drei und vier sind sieben“ wird das Wort „und“ nicht als Junktor verwendet. Der Junktor „und“ kann in der Umgangssprache auch durch „außerdem“, „sowie“, „sowohl . . . , als auch . . . “ usw. ausgedrückt werden (oft wird auch nur ein Komma verwendet), am Sinn ändert sich nichts, es entstehen lediglich rhetorische oder stilistische Varianten. Bei den Sätzen „Anna spielt Geige, aber Berta spielt Klavier“, „Anna spielt Geige, trotzdem spielt Berta Klavier“, „Obwohl Anna Geige spielt, spielt Berta Klavier“ liegt der Fall etwas anders. Hier soll ein gewisser Gegensatz der Teilaussagen betont werden. Fragt man sich aber, unter welchen Bedingungen die Gesamtaussage jeweils wahr ist, stellt man fest, daß das nur der Fall ist, wenn Anna tatsächlich Geige spielt und Berta wirklich Klavier spielt. Bei dieser Fragestellung unterscheiden sich also „aber“, „trotzdem“ usw. nicht von „und“, bei der Verwendung als Junktor geht der Nebensinn (Gegensatz) verloren.

Dazu noch ein weiteres Beispiel. Durch den Satz „Anna spielt Geige und Berta spielt Klavier“ wird das gleiche ausgesagt wie durch „Berta spielt Klavier und Anna spielt Geige“ (in der Sprache der Mathematik heißt das, daß die durch „und“ gebildete Verknüpfung der Aussagen kommutativ ist). Anders bei den Sätzen „Er hatte einen Unfall und kam ins Krankenhaus“ und „Er kam ins Krankenhaus und hatte einen Unfall“. Zwar sind auch diese Sätze genau dann wahr, wenn beide Teilsätze wahr sind, zusätzlich wird aber eine unterschiedliche zeitliche Abfolge beschrieben. Wird „und“ als Junktor im Sinne unserer Definition verwendet, kann auch dieser Nebensinn nicht berücksichtigt werden.

Ein anderes vielbenutztes Bindewort ist „oder“. Jemand könnte auf die Frage nach den Urlaubsplänen beispielsweise antworten „Ich fahre nach Dänemark, oder ich schreibe meine Diplomarbeit zu Ende.“ Dieser Satz erweist sich sicher als falsch, wenn beide Teilsätze falsch sind, also der oder die betreffende weder nach Dänemark fährt, noch die Diplomarbeit beendet. Die Aussage ist ebenso sicher wahr, wenn nur eine der beiden Teilaussagen wahr ist. Problematischer ist es, wenn die Person sich ein Haus in Dänemark mietet und dort ihre Arbeit schreibt, wenn also beide Teilaussagen wahr sind. Bei der Beurteilung der Wahrheit der Gesamtaussage sind nun zwei Ansichten möglich: Erstens könnte man die Aussage auch in diesem Falle für wahr erklären und so das „oder“ im nichtausschließenden Sinne verwenden. Verdeutlichen kann man diese Verwendungsweise so: Am schwarzen Brett einer Schule findet sich der Anschlag: „Wegen einer Orchesterprobe versammeln sich heute um 15 Uhr alle, die Flöte oder Geige spielen“. Hiermit sind selbstverständlich auch die gemeint, die beide Instrumente beherrschen. Zweitens könnte man die Gesamtaussage im Falle der Wahrheit beider Teilaussagen als falsch bewerten, etwa mit Hinweis auf die Speisekarte eines Restaurants. Wenn dort bei einem Festpreismenü steht: „Dritter Gang Rehrücken oder Rinderfilet“, so wird ein Gast sicher nicht mit Erfolg darauf bestehen können, beides zu bekommen. Hier wird das „oder“ im ausschließenden Sinn benutzt. Mit dem einen Wort „oder“ lassen sich also zwei unterschiedliche Junktoren beschreiben; zur Verdeutlichung wird oft, aber nicht immer, für den zweiten Junktor „entweder ..., oder ...“ benutzt (im „Neudeutsch“ wird für den ersten häufig „und/oder“ geschrieben).

Wie wir gesehen haben, gibt die Umgangssprache die Junktoren nicht eindeutig wieder. Ein und derselbe Junktor kann in der Umgangssprache durch verschiedene Worte ausgedrückt werden, umgekehrt kann ein Wort Ausdruck verschiedener Junktoren sein. Weiter kann ein Wort mal als Junktor, mal in einer anderen Funktion verwendet werden, es kann einen über die Bedeutung des Junktors hinausgehenden Neben oder Zusatzsinn haben. Um solche Mehrdeutigkeiten zu vermeiden, werden in der Logik für die Junktoren eigene, *kunstsprachliche* Zeichen und Namen benutzt (außerdem dient das der Abkürzung und der leichteren Arbeit im Formalismus). Wir verwenden in diesem Skript „$\wedge$“ (für „und“), „$\vee$“ (für „oder“), „$\succ\!\prec$“ (für „entweder ..., oder ...“). Die Junktoren $\wedge$, $\vee$, $\succ\!\prec$ werden (in dieser Reihenfo*Disjunktion*lge) *Konjunktor, Adjunktor, Disjunktor,* die entstehenden Aussageverknüpfungen *Konjunktion, Adjunktion* und (vollständige) *Disjunktion* genannt.[2]

Um einen Junktor eindeutig zu definieren, genügt es, den Wahrheitswert der durch den Junktor entstandenen Gesamtaussage für jede mögliche Verteilung der Wahrheitswerte bei den Teilaussagen anzugeben. Dafür kann man ein Schema benutzen, bei dem man sich sinnvollerweise auf eine feste Reihenfolge einigt. Ein solches Schema wird *Wahrheits(wert)tafel*, die Abfolge der Werte unter der Gesamtaussage *Wahrheitswertverlauf* genannt. Für die drei in diesem Abschnitt vorgestellten Junktoren sieht das so aus:

P	Q	P $\wedge$ Q	P $\vee$ Q	P $\succ\!\prec$ Q
w	w	w	w	f
w	f	f	w	w
f	w	f	w	w
f	f	f	f	f

2.2 Wenn-dann-Verknüpfungen

Die mit „wenn ..., dann ...“ gebildeten Aussagen machen im Alltag und in der Logik die meisten Schwierigkeiten. Auch hier zunächst ein Beispiel.

Eine Mutter verspricht ihrer Tochter „Wenn Sonntag die Sonne scheint, dann gehen wir in den Zoo“. Dieses Versprechen kann man sicher als gehalten ansehen, die Gesamtaussage ist also sicher wahr, wenn die Sonne am Sonntag scheint und die beiden dann auch wirklich in den Zoo gehen. Ebenso liegt kein Bruch des Versprechens vor, wenn die beiden bei Regenwetter den Zoobesuch unterlassen. Schematisch:

[2]Wir verzichten hier auf die Unterscheidung von Verknüpfungs*vorschrift* (der sogenannten *Wahrheitsfunktion*) und dem *Ergebnis* ihrer Anwendung auf die Teilaussagen. Leider werden in der Logik weder die Namen noch die Zeichen für die verschiedenen Junktoren einheitlich verwendet; beispielsweise findet man statt *Adjunktion* auch die Bezeichnung *Disjunktion* und statt *Disjunktion* auch *Kontravalenz*.

P	Q	wenn P, dann Q
w	w	w
w	f	
f	w	
f	f	w

Schwieriger ist der zweite und dritte Fall. Nehmen wir an, daß es am Sonntag regnet und daß die Tochter trotzdem unbedingt in den Zoo will. Sie könnte dann zu ihrer Mutter sagen: „Du hast dich ja nur darauf festgelegt, was wir bei Sonnenschein machen. Du hättest also dein Versprechen gebrochen, wenn wir bei Sonnenschein nicht in den Zoo gegangen wären (Fall 2). Was wir bei Regen machen, hast du völlig offen gelassen, also können wir genau so gut in den Zoo gehen (Fall 3), das widerspricht deiner Aussage doch gar nicht!" Die Tochter plädiert also für diesen Wahrheitswertverlauf:

P	Q	wenn P, dann Q
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Die Mutter, der eventuell nichts am Zoobesuch liegt, könnte antworten: „Ich habe gemeint, daß Sonnenschein eine Voraussetzung für den Zoobesuch ist. Deshalb wäre es falsch, wenn wir bei Regen trotzdem in den Zoo gehen (Fall 3). Übrigens hätte ich mein Versprechen von neulich auch dann nicht gebrochen, wenn wir bei Sonnenschein nicht in den Zoo gegangen wären (Fall 2), denn ich wollte ja nur sagen, daß wir ohne Sonnenschein auf keinen Fall in den Zoo gehen, aber selbst bei Sonnenschein könnte ja immer noch etwas dazwischenkommen." Die Interpretation der Mutter entspricht diesem Wahrheitswertverlauf:

P	Q	wenn P, dann Q
w	w	w
w	f	w
f	w	f
f	f	w

Spinnen wir die Geschichte ruhig noch weiter. Wie man sich leicht vorstellen kann, gab es nun einigen Streit zwischen Tochter und Mutter. Um für künftige Fälle Klarheit zu haben, einigten sich beide darauf, den Satz so zu verstehen, daß man bei Sonnenschein auf jeden Fall in den Zoo geht, umgekehrt genauso sicher darauf verzichtet, wenn die Sonne nicht scheint. Jetzt ergibt sich dieser Wahrheitswertverlauf:

P	Q	wenn P, dann Q
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Wir haben hier ein weiteres Beispiel für die Mehrdeutigkeit der Umgangssprache. Die Wendung „wenn ..., dann ... “ kann Umschreibung dreier verschiedener Junktoren sein:

P	Q	$P \rightarrow Q$	$P \leftarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	f
f	w	w	f	f
f	f	w	w	w

In der Umgangssprache wird die durch den *Subjunktor* $\rightarrow$ gebildete Aussageverknüpfung (*Subjunktion*[3]) auch durch „Q, falls P“, „unter der Bedingung P gilt Q“ und ähnliche Formulierungen ausgedrückt.

Oft wird der Bedingungssatz auch versteckt, wie das folgende Beispiel zeigt. In der Zeit, als die Filialen von Kaffeegroßröstereien nur Kaffee verkauften, gab es bei einer Firma die Werbung „Beim Kauf von einem Pfund Kaffee erhalten Sie eine hübsche Dose “. Leicht einzusehen ist, daß es sich hierbei lediglich um eine sprachliche Variante der Aussage „Wenn Sie ein Pfund Kaffee kaufen, ... “ handelt. Unter Hinweis auf das Verbot von Koppelgeschäften wurde gegen die Firma ein Verfahren wegen unlauteren Wettbewerbs eingeleitet. Vor Gericht argumentierten die Anwälte der Firma so, daß hier ja ein verkürzter Wenn-dann-Satz vorliege und daß deshalb nicht ausgeschlossen sei, daß man diese Dose auch ohne den Erwerb von Kaffee erhalten könne (Zeile 3). Die Kunden bräuchten ja nur zu fragen, dann würden sie die Dose ohne weiteres auch so bekommen. Das Gericht schloß sich dieser Argumentation nicht an, da sie nicht dem allgemeinen Verständnis des umstrittenen Satzes entsprechen würde (Zumindest Juristen ist dieses Verständnis eines Wenn-dann-Satzes aber geläufig, vgl. nächstes Beispiel).

Die wohl genaueste Wiedergabe der Subjunktion ist „Wenn P, dann sicher Q (evtl. aber auch sonst)“. Beispiel: „Wenn man stiehlt, dann muß man (sicher) mit Strafe rechnen (evtl. aber auch sonst)“. Dieser Satz ist nur falsch, wenn man bei einem Diebstahl nicht mit Strafe rechnen muß (Zeile 2). Stiehlt man nicht, so kann es trotzdem sein, daß man mit Strafe rechnen muß (etwa, wenn man ein anderes Verbrechen begeht (Zeile 3). Bei untadeligem Verhalten besteht keine Strafandrohung, auch hier ist die Gesamtaussage wahr (Zeile 4). In der Logik sagt man auch, P ist eine *hinreichende Bedingung* für Q. Damit soll ausgedrückt werden, daß das Eintreten des in P beschriebenen Ereignisses für das Eintreten von Q hinreichend (ausreichend) ist, das in Q beschriebene Ereignis kann aber auch ohne P eintreten. Die Wahrheit von P ist nicht unbedingt notwendig. Ausgeschlossen wird nur, daß P wahr, Q hingegen falsch ist. Nur in diesem Fall, also zur Wiedergabe des Junktors $\rightarrow$ wird in der Logik die Wendung „wenn ..., dann ... “ benutzt.

Die umgangssprachliche Umschreibung des Subjunktors durch „wenn ..., dann ... “ ist nicht ohne Probleme. Es ist sicher nicht leicht nachvollziehbar, daß diese Sätze mit falschem Vorderglied (Beispiel: Wenn der Mond aus Käse ist, heiße ich Emil) immer wahr sind (unabhängig davon, wie der Sprecher heißt). Bei dem Satz „Wenn es einen deutschen Reichskanzler mit Namen Müller gab, dann ist $2 \cdot 2 = 4$“ wird man vielleicht die Wahrheit zugeben, sicher aber auch fragen, warum die Gültigkeit des Einmaleins von der deutschen

[3] Auch hier sind verschiedene Bezeichnungen üblich, z. B. *Konditional* und *Implikation*. Letztere sollte man allerdings für die logische Folgerungsbeziehung reservieren (vgl. unten Abschnitt 7.2).

Geschichte abhängen soll. Ehe man nun die Logik für ein verrücktes Unternehmen hält, muß man sich unbedingt klar machen, daß wir hier mit „wenn ..., dann ...“ einen Junktor wiederzugeben versuchen, also Aussagen so zu einer neuen Aussage verknüpfen, daß deren Wahrheitswert ausschließlich von den Wahrheitswerten der Teilaussagen abhängt. Da wir in der Logik von Inhalten absehen, brauchen die Teilaussagen anders als bei unseren Beispielen weiter oben inhaltlich nichts miteinander zu tun zu haben. Dabei fällt auch unter den Tisch, ob neben dem genannten Verknüpfungsaspekt zwischen den Teilsätzen eine inhaltliche Folgebeziehung besteht (der Junktor $\rightarrow$ steht allerdings in engem Zusammenhang mit der logischen Folgebeziehung (Näheres im Abschnitt 6).

Unter allen eben gemachten Einschränkungen läßt sich der Junktor $\leftarrow$ (*konverser Subjunktor*) in der Umgangssprache am besten mit „nur wenn ..., dann ... (aber eventuell auch nicht)“ umschreiben. Der Satz „(Nur) wenn man mindestens 18 Jahre alt ist, (dann) darf man Motorrad fahren“ wäre nur falsch, wenn man auch unter 18 Motorrad fahren dürfte (Zeile 3). Wenn man das Mindestalter erreicht hat, kann es sein, daß man Motorrad fahren darf (Zeile 1), es kann aber auch nicht erlaubt sein, etwa, wenn man keinen Führerschein Klasse 1 hat (Zeile 2). Unser Satz drückt also aus, daß das Mindestalter 18 eine notwendige (allerdings keine hinreichende) Bedingung für das legale Fahren von Motorrädern ist. Für P $\leftarrow$ Q kann man also auch sagen: P ist eine *notwendige Bedingung* für Q.

Zwischen den Junktoren $\rightarrow$ und $\leftarrow$ gibt es einen wichtigen Zusammenhang. Wenn P eine notwendige Bedingung für Q ist, dann ist Q eine hinreichende Bedingung für P. Wenn ich von einer Person weiß, daß sie legal Motorrad fährt, so weiß ich sicher, daß sie mindestens 18 Jahre alt ist. Diese Information ist also hinreichend für die Altersabschätzung, allerdings nicht notwendig, denn es gibt auch Personen über 18, die keinen entsprechenden Führerschein haben. In diesen Fällen muß man auf andere Informationen zurückgreifen. Wenn umgekehrt P eine hinreichende Bedingung für Q ist, dann ist Q eine notwendige Bedingung für P. An unserem vorigen Beispiel: Diebstahl ist hinreichend für eine Strafandrohung (aber nicht notwendig, es gibt ja auch andere Delikte). Umgekehrt ist dann die mit der „Aneignung“ verbundene Strafandrohung notwendig für ihre Einordnung als „Diebstahl“ und nicht als „Kauf“, „Erbschaft“ etc. (aber nicht hinreichend, da es ja auch noch andere „Aneignungshandlungen“ gibt, etwa Betrug, Erpressung etc.). Statt P $\rightarrow$ Q kann also auch Q $\leftarrow$ P geschrieben werden (nicht aber P $\leftarrow$ Q).

Ein Sonderfall liegt vor, wenn P sowohl hinreichende als auch notwendige Bedingung für Q ist. Beispielsweise ist die Teilbarkeit einer Zahl durch 2 und durch 3 notwendig für die Teilbarkeit dieser Zahl durch 6, durch 12 oder durch 30. Aber nur für die Teilbarkeit durch 6 ist die Teilbarkeit durch 2 und durch 3 auch hinreichend. Die beiden Sätze:: „Nur wenn eine Zahl durch 2 und durch 3 teilbar ist, dann ist sie durch 6 teilbar“ und „Wenn eine Zahl durch 2 und durch 3 teilbar ist, dann ist sie (sicher) auch durch 6 teilbar“ lassen sich zu dem Satz „Eine Zahl ist durch 2 und durch 3 teilbar genau dann, wenn sie durch 6 teilbar ist“ zusammenfassen. Durch die Verknüpfung der beiden Teilsätze mit „... genau dann, wenn ...“ soll ausgeschlossen werden, daß ein Teilsatz wahr und der andere falsch ist. Es ergibt sich der Wahrheitswertverlauf des Junktors $\leftrightarrow$ (*Bisubjunktor*). Eine andere mögliche Umschreibung dieses Junktors ist „wenn ..., dann und nur dann ...“. Das mag etwas umständlich klingen, aber die Mühe der genauen Formulierung bei „Wenn Sonntag die Sonne scheint, dann und nur dann gehen wir in den Zoo“ hilft im Alltag vielleicht, Streit zu vermeiden, in der Wissenschaft ist diese Präzision unverzichtbar.

Der in der Umgangssprache oft mißbrauchte Satz: „Wer glaubt, wird selig“ ist ein zentraler Satz sowohl der katholischen als auch der evangelischen Glaubenslehre, bei seiner Interpretation gibt es aber einen wesentlichen Unterschied. Nach der katholischen Lehre ist der Glaube (zusammen mit der Taufe) nur eine notwendige, nicht aber hinreichende Bedingung für die Seligkeit, gute Taten und ein gottgefälliger Lebenswandel müssen hinzukommen. Hier wird also der Junktor $\leftarrow$ zwischen die Teilsätze gesetzt. Der evangelischen Interpretation entspricht die Verwendung von $\leftrightarrow$: genau die, die glauben (und sich taufen lassen), werden auch selig werden.[4]

2.3 Negation

Eine wichtige Konsequenz unserer Definition von „Aussage“ ist, daß eine Aussage, die nicht wahr ist, falsch sein muß, und daß umgekehrt eine Aussage, die nicht falsch ist, sicher wahr ist. Sei P irgendeine Aussage, so erhalten wir eine neue Aussage mit dem jeweils anderen Wahrheitswert dadurch, daß wir die Negation (Verneinung) von P bilden, symbolisch schreiben wir dafür $\neg$ P. Wird die Negation erneut verneint ($\neg\neg$ P), so hat die jetzt entstehende Aussage denselben Wahrheitswert wie P. Schematisch:

P	$\neg$ P	$\neg\neg$ P
w	f	w
f	w	f

Da der Wahrheitswert der Aussage $\neg$ P ausschließlich vom Wahrheitswert der (Teil-) Aussage P abhängt, handelt es sich bei dem Negationszeichen. um einen Junktor, wir nennen ihn *Negator*.

Das Voranstellen des Negationszeichens vor die Aussage kann in der Umgangssprache durch die Wendung „Es ist nicht der Fall, daß. . . “ wiedergegeben werden. Meist wird aber an passender Stelle im Satz ein „nicht“ eingefügt, häufig wird die Negation auch durch Worte wie „keiner“, „nie“ oder durch die Vorsilbe „un“ gebildet. Allerdings deckt sich auch hier die Umgangssprache nicht immer mit der logischen Verwendung der Negation. Wenn jemand die Handlung eines Mitmenschen mit dem Satz kommentiert „Dadurch werden sie mir nicht sympathischer“, so wird der so angesprochene annehmen, daß er in der Wertschätzung des anderen gesunken ist. Streng genommen drückt der Satz aber nur aus, daß die Sympathie nicht gestiegen ist (auch bei unveränderter Wertschätzung ist dieser Satz wahr), es würde also nicht im Widerspruch zu der Aussage stehen, wenn sie unverändert gleich geblieben wäre. Auch die doppelte Negation entspricht nicht immer der unverneinten Aussage, zwischen „Er ist mir nicht unsympathisch“ und „Er ist mir sympathisch“ kann ein gradueller Unterschied bestehen. Das liegt daran, daß mit „sympathisch“ und „unsympathisch“ nur die Endpunkte auf einer Skala mit vielen Zwischenwerten angegeben sind. In der Logik werden solche *konträren* (gegensätzlichen) von *kontradiktorischen* (gegenteiligen) Begriffen und mit ihnen gebildeten Aussagen unterschieden. Das Gegenteil von „weiß“ ist nicht „schwarz“ (das wäre der Gegensatz), sondern „nicht weiß“ (also

[4] Eine ausführliche Ananlyse dieses Satzes findet sich in: Albert MENNE, *Einführung in die Logik*, Bern 1966 (Dalp), S. 39 f. Auch wenn Gottes Ratschluß für uns Menschen als unerforschlich gilt, wird von beiden Kirchen die Verwendung von $\rightarrow$ ausgeschlossen, also daß auch jemand ohne Glauben die Seligkeit erlangen könnte.

z. B. auch „grün“, “rot„). Bei kontradiktorischen Sätzen (Begriffen) ist immer genau einer wahr (zutreffend), bei konträren können auch beide falsch (unzutreffend) sein. Die hier definierte logische Negation entspricht immer der Kontradiktion.

Aufgaben

1. Handelt es sich bei den folgenden Sätzen um Aussagen im Sinne der wahrheitsdefiniten Aussagenlogik?
   a) Der Mond ist größer als die Sonne.
   b) Du solltest dein Kind nicht immer anschreien.
   c) Am 12. 4. 2065 schneit es in Hamburg.
   d) Caesar sollte Gallien erobern.
   e) $3 + 7 = 5$
   f) $3x + 2 < 22$
   g) Die Aussage in Aufgabe 1 g) ist falsch.
2. Prüfen Sie, ob es sich bei „nachdem“, „dennoch“, „deshalb“, „nicht nur…, sondern auch…“ um Junktoren handelt, indem Sie jeweils die Sätze „Ich war krank“ (P) und „Anna hat mich besucht“ (Q) verknüpfen und dafür Wahrheitstafeln aufstellen.
3. In welchen der folgenden Sätzen wird „und“ nicht als Junktor verwendet?
   a) Bochum liegt zwischen Essen und Dortmund.
   b) Es gibt keinen Flughafen in Essen und Dortmund.
   c) Anna und Berta waschen sich.
   d) Die Linien S1 und U3 treffen sich am Hauptbahnhof.
4. Welchem der Junktoren $\vee$, $\succ\!\prec$ entspricht das „oder“ in den folgenden Sätzen?
   a) Pierre ist kanadischer oder französischer Staatsbürger.
   b) Pierre ist in Paris oder Quebec geboren.
   c) Für den Posten suchen wir einen Juristen oder Betriebswirt.
5. Welchem der Junktoren $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\leftrightarrow$ entspricht das „wenn …, dann …“ in den folgenden (logisch nicht genau genug formulierten) Sätzen:
   a) Wenn der Strom ausfällt, dann läuft die Waschmaschine nicht.
   b) Wenn Schnee liegt, dann laufe ich Ski.
   c) Wenn eine Person weiblich ist, dann kann sie Kinder gebären.
   d) Wenn Heiligabend auf einen Montag fällt, dann fällt Neujahr auf einen Dienstag.
   e) Wenn man Kaffee trinkt, dann steigt der Blutdruck.
   f) Wenn die Temperatur unter 0 Grad Celsius fällt, dann wird (bei normalem Luftdruck) reines Wasser zu Eis.

6. Bei welchen der folgenden Sätze handelt es sich um eine (kontradiktorische) Verneinung von „Dies Los gewinnt mit Sicherheit 1000 DM“?

   a) Dieses Los verliert mit Sicherheit.
   b) Nicht dieses Los gewinnt mit Sicherheit 1000 DM.
   c) Dieses Los gewinnt wahrscheinlich 1000 DM.
   d) Dieses Los gewinnt höchstens 50 DM.
   e) Dieses Los gewinnt nicht mit Sicherheit 1000 DM.
   f) Dieses Los gewinnt mit Sicherheit nicht 1000 DM.
   g) Es ist sehr unsicher, ob dieses Los 1000 DM gewinnt.
   h) Es ist nicht so, daß dieses Los mit Sicherheit 1000 DM gewinnt.

3 Aussagenlogische Form

Aussagen können nicht nur wegen unscharfer Worte und Begriffe mehrdeutig sein, gelegentlich ist auch der Bezug der Teilsätze zueinander nicht eindeutig. Wenn sich beispielsweise zwei Freundinnen über die Gestaltung des Abends unterhalten und eine vorschlägt: „Entweder wir besuchen die Oper, oder wir gehen ins Kino, und wir essen anschließend im El Buco“, so ist nicht unbedingt klar, ob durch das „und“ nur Restaurant und Kinobesuch verbunden wird (etwa, weil die Oper viel länger dauert als das Kinoprogramm) oder ob auch nach der Oper gegessen werden soll. Wenn wir mehr als zwei Teilaussagen zu einer neuen Aussage verknüpfen, benutzen wir Klammern, um die logische Struktur eines Satzes eindeutig wiederzugeben. Mit P, Q, R für die Teilsätze lassen sich dann die beiden Möglichkeiten so darstellen:

$$(\mathrm{P} \rightarrowtail\!\!\!\prec \mathrm{Q}) \wedge \mathrm{R} \qquad\qquad \mathrm{P} \rightarrowtail\!\!\!\prec (\mathrm{Q} \wedge \mathrm{R})$$

Der Unterschied zwischen diesen beiden Fassungen wird besonders deutlich, wenn man in einer Wahrheitstafel ihren jeweiligen Wahrheitswertverlauf vergleicht. Jede der drei Aussagen kann entweder wahr oder falsch sein, bei drei Teilaussagen gibt es also $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ verschiedene Verteilungen der Wahrheitswerte. Allgemein: Bei n verschiedenen Teilaussagen gibt es 2^n Möglichkeiten. Der Wahrheitswert der Gesamtaussage wird gemäß der Klammerung von innen nach außen “ausgerechnet“. Wenn man in dieser Reihenfolge Zahlen unter die Spalten schreibt, steht über der höchsten Zahl der Wahrheitswertverlauf der Gesamtaussage. Die Wahrheitstafeln für unsere beiden Beispiele sehen dann so aus:

P	Q	R	$(P \succ\!\prec Q)$	$\wedge\ R$	$P \succ\!\prec$	$(Q \wedge R)$
w	w	w	f	f	f	w
w	w	f	f	f	w	f
w	f	w	w	w	w	f
w	f	f	w	f	w	f
f	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	f	f	f
f	f	w	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f
			(1)	(2)	(2)	(1)

Die Wahrheitswertverläufe (2) unterscheiden sich in der zweiten und vierten Zeile. Die rechte Version ist auch wahr, wenn nach der Oper (P wahr) auf den Restaurantbesuch verzichtet wird (R falsch).

Klammern sind nicht nötig, wenn in einer Aussage nur einer der Junktoren $\vee$, $\wedge$, $\succ\!\prec$, $\leftrightarrow$ alleine vorkommt (Beispiel $P \wedge Q \wedge R \wedge S$), für $\rightarrow$ und $\leftarrow$ gilt das nicht, $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ hat beispielsweise einen anderen Wahrheitswertverlauf als $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$. Zur weiteren Klammerersparnis verabreden wir, daß die Junktoren $\wedge$, $\vee$, $\succ\!\prec$ Vorrang haben, daß sie also enger binden als die Junktoren $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\leftrightarrow$. (So wie in der Mathematik „Punktrechnung“ vor „Strichrechnung“ geht). Zum Beispiel schreiben wir $P \vee Q \rightarrow R$ statt $(P \vee Q) \rightarrow R$, bei $P \vee (Q \rightarrow R)$ hingegen können die Klammern nicht weggelassen werden.

Das Negationszeichen bezieht sich immer nur auf den nächsten Buchstaben oder durch Klammern eingeschlossenen Ausdruck:

Beispiel	verneint wird
$\neg P \vee Q \rightarrow R$	P
$P \vee \neg Q \rightarrow R$	Q
$\neg (P \vee Q) \rightarrow R$	$P \vee Q$
$\neg (P \vee Q \rightarrow R)$	$P \vee Q \rightarrow R$

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun in der Lage, die *aussagenlogische Form* eines umgangssprachlichen Satzes zu bestimmen. Zur Erinnerung: Das ist erstens nur möglich bei deskriptiven (beschreibenden) Sätzen; zweitens können die Teilsätze nur als komplette, abgeschlossene Einheiten berücksichtigt werden, (für die innere logische Form sind Mittel der Quantorenlogik nötig), drittens müssen die Teilsätze durch Junktoren verbunden sein. Kausale, zeitliche, finale, konsekutive u.ä. Verbindungen können nicht dargestellt werden. Sind diese Voraussetzungen gegeben, erhalten wir die aussagenlogische Form eines Satzes durch folgende Maßnahmen:

- die Teilsätze werden durch Symbole ersetzt,
- die Junktoren werden von stilistischen oder rhetorischen Varianten „befreit“, identifiziert und durch ihre logischen Zeichen ausgedrückt,
- Die Zuordnung und Gruppierung der Teilsätze wird gegebenenfalls durch Klammern kenntlich gemacht.

Da wir nach langem Anlauf nun endlich den für die formale Logik so grundlegenden Begriff der logischen Form erreicht haben, da das Ihnen, lieber Leser, und uns so viel Mühe gemacht hat, weil also der Augenblick so feierlich ist, nehmen wir als Beispiel nicht irgendeinen Satz, sondern einen der einst meistgedruckten Sätze der deutschen Sprache:

> „Wer Banknoten nachmacht oder verfälscht oder nachgemachte oder verfälschte sich verschafft und in Verkehr bringt, wird mit Freiheitsstrafe nicht unter zwei Jahren bestraft."

Vorschlag: Bestimmen Sie vor dem Weiterlesen die logische Form selbst! Dieser Satz ist trotz seiner Form kein rein deskriptiver Satz, sondern er hat als Kurzfassung von § 146 StGB einen normativen (Neben) Sinn (nämlich Leute durch Strafandrohung vom Geldfälschen abzuhalten), den wir unberücksichtigt lassen müssen. Weiter schlagen wir zur Vereinfachung vor, „Banknoten nachmachen" und „Banknoten verfälschen" zu „Banknoten fälschen" zusammenzufassen (nebenbei gesagt können wir uns auch gar nicht vorstellen, wie durch „Verfälschen" etwa durch das Anhängen einer Null „der Anschein eines höheren Wertes hervorgerufen wird"). Der Satz enthält dann vier Teilsätze:

- jemand fälscht Banknoten (P),
- jemand verschafft sich gefälschte Banknoten (Q),
- jemand bringt gefälschte Banknoten in Verkehr (R),
- jemand wird mit Freiheitsstrafe nicht unter zwei Jahren bestraft (S).

Der Ausdruck „Wer . . . , wird . . . " ist sicher eine stilistische Variante von „Wenn . . . , dann . . . ". Da auch andere Delikte in der angegebenen Weise bestraft werden können, handelt es sich um den Junktor $\rightarrow$. „Oder" müssen wir durch „$\vee$" wiedergeben, da sich im ausschließenden Fall sonst jemand der Strafe dadurch entziehen könnte, daß er sich zusätzlich zu den eigenen Fälschungen noch falsche Banknoten verschafft. Rein vom Wortlaut her ist nun als Gruppierung sowohl $P \vee (Q \wedge R) \rightarrow S$ als auch $(P \vee Q) \wedge R \rightarrow S$ möglich, rein intuitiv wird man wohl eher ersterer zuneigen. Mit einer Wahrheitswertanalyse können wir nun feststellen, was genau in diesem Fall verboten ist und was nicht.[5]

[5] Bei steigender Zahl von Teilaussagen werden Wahrheitstafeln immer aufwendiger. Insbesondere, wenn es nur darum geht, festzustellen, ob ein Schema eine Tautologie ist, sind dann andere Verfahren günstiger. Etwa die sogenannten *Normalformen* (vgl. z. B. H. A. Schmidt, *Mathematische Gestze der Logik I: Aussagenlogik*, Berlin, Heidelberg (Springer) 1960, S. 40 ff., W. v. O. Quine, *Grundzüge der Logik*, Frankfurt a. M. (Suhrkamp) 1974, S. 85 ff.) oder der *Pfeilwurf* (vgl. Schmidt a. a. O., S. 102 f., S. 230 ff., Quine a. a. O., S. 65 ff.).

P	Q	R	S	P ∨	(Q ∧ R)	→ S	Zeile
w	w	w	w	w	w	w	1
w	w	w	f	w	w	f	2
w	w	f	w	w	f	w	3
w	w	f	f	w	f	f	4
w	f	w	w	w	f	w	5
w	f	w	f	w	f	f	6
w	f	f	w	w	f	w	7
w	f	f	f	w	f	f	8
f	w	w	w	w	w	w	9
f	w	w	f	w	w	f	10
f	w	f	w	f	f	w	11
f	w	f	f	f	f	w	12
f	f	w	w	f	f	w	13
f	f	w	f	f	f	w	14
f	f	f	w	f	f	w	15
f	f	f	f	f	f	w	16
				(2)	(1)	(3)	

Die Gesamtaussage kann falsch sein. Das ist genau dann der Fall, wenn bei wahrem Vorderglied $P \vee (Q \wedge R)$ trotzdem keine Strafe erfolgt (z. B., weil der Täter nicht gefaßt wurde). Da wir uns aber um legales Verhalten bemühen wollen, nehmen wir die Strafandrohung ernst und betrachten deshalb nur die Fälle, in denen die Gesamtaussage wahr ist. Interessant sind dabei die letzten sechs Fälle, hier ist die im Satz genannte Bedingung für die Bestrafung nicht erfüllt ($P \vee (Q \wedge R)$ ist falsch). In drei Fällen Zeile 11, 13, 15 wird man dennoch bestraft (S wahr), sei es wegen eines anderen Deliktes oder wegen zusätzlicher Umstände, sei es als Justizirrtum. Bleiben drei Fälle, in denen man legalerweise (Gesamtaussage wahr) nicht bestraft wird (S falsch). Nicht erstaunlich ist das für den letzten Fall. Hier hat man weder Geld gefälscht, noch gefälschtes sich verschafft noch in Umlauf gebracht (P, Q, R falsch). Eine Garantie für Straffreiheit ist das aber auch nicht, vgl. Zeile 15. Überraschend ist aber vielleicht, daß man straffrei ausgehen kann (vgl. Zeile 11 und 13), wenn man nicht Geld fälscht und in Umlauf bringt, aber sich Falschgeld verschafft (Z. 12) bzw., wenn man Falschgeld in Umlauf bringt, ohne es sich verschafft oder gefälscht zu haben (Z. 14). Bei der zweiten Gruppierungsmöglichkeit gibt es sogar noch mehr Fälle (Übung!). Der § 146 StGB ist etwas genauer und differenzierter als die Kurzfassung. Damit die genannten Handlungen strafwürdig sind, muß die „Absicht“ hinzukommen, „daß es als echt in Verkehr gebracht … werde.“ Hier wird dann auch die Grenze der formalen Logik deutlich: Ob jemand, der mit Falschgeld bezahlt, diese Absicht hatte, ist nicht mehr mit logischen Mitteln festzustellen.

Aufgaben

1. Geben Sie die aussagenlogische Form an:

   a) Falls wir uns nicht beeilen, verpassen wir den Zug und kommen zu spät in München an.

b) Entweder stimmt es nicht, daß dieses Medikament eine Heilwirkung hat, oder sie tritt nur ein, wenn man nicht raucht.

c) Das reale Sozialprodukt wird größer, sofern bei sonst gleichen Umständen die Produktivität steigt oder sich die Inflation nicht verstärkt.

2. Unter welchen Umständen sind diese Sätze falsch?

4 Tautologische, kontradiktorische und erfüllbare Aussagenschemata

Eine der zuverlässigsten Wetterprognosen ist der Satz: „Wenn der Hahn kräht auf dem Mist, ändert sich das Wetter, oder es bleibt, wie es ist.“ Diese Satz hat die logische Form $P \to (Q \succ\!\prec \neg Q)$, die zugehörige Wahrheitstafel lautet

P	Q	$P \to$	$(Q \succ\!\prec$	$\neg\ Q)$
w	w	w	w	f
w	f	w	w	w
f	w	w	w	f
f	f	w	w	w
		(3)	(2)	(1)

An dieser Tafel läßt sich gut erkennen, warum diese „Prognose“ so verläßlich ist: unabhängig davon, ob der Hahn kräht oder nicht, ob das Wetter so bleibt oder sich ändert, also völlig unabhängig vom Wahrheitswert der Teilaussagen ist die Gesamtaussage in jedem Fall wahr, sie kann unter keinen Umständen falsch werden.

Das gilt nun nicht nur für diese Wettervorhersage, sondern für jeden Satz mit derselben logischen Form, also beispielsweise auch für „Falls die Opposition die nächste Wahl gewinnt, werden die Steuern erhöht oder sie werden dann nicht erhöht.“ Der Ausdruck $P \to (Q \succ\!\prec \neg Q)$ ist also nicht nur die symbolische „Übersetzung“ einer bestimmten Aussage in die formale Sprache der Logik, sondern die schematische Darstellung einer ganzen Reihe von Aussagen, kurz ein Aussagenschema. Solche Aussagenschemata (und nicht konkrete inhaltliche Aussagen) sind die Untersuchungsgegenstände der formalen (Aussagen) Logik im engeren Sinn. Technisch gesprochen sind „P“, „Q“, „R“, ... dann nicht mehr abkürzende Symbole für einzelne feste Aussagen, sie dienen dann als Mitteilungszeichen für irgendwelche nicht weiter konkretisierte Aussagen.

Wenn Ihnen das sehr abstrakt vorkommt, dann haben Sie völlig recht. In der Tat handelt es sich bei einem Aussagenschema um das Ergebnis eines mehrfachen Abstraktionsprozesses. Unter einer *Abstraktion* versteht man die Betonung einer in diesem Fall interessanten Gemeinsamkeit unter Vernachlässigung der Unterschiede. Bestimmte Pflanzen in einem Park mögen sich in Größe, Form , Farbe etc. unterscheiden, gemeinsam kann ihnen aber sein, daß sie *Eichen* sind. Eichen sehen ganz anders aus als Birken, Kiefern, Buchen, aber sie sind (im Unterschied zu anderen Dingen) *Bäume*. Nicht nur Gegenstände unserer natürlichen Umwelt lassen sich auf diese Weise zusammenfassen: die Schreibfiguren („Brüche“) $\frac{6}{9}, \frac{20}{30}, \frac{112}{168}, \ldots$ stehen in der Mathematik für ganz unterschiedliche Divisionsaufgaben, ihr

Ergebnis aber ist jedesmal gleich. Und deshalb können wir sagen, sie stellen alle denselben Bruch $\frac{2}{3}$ dar (Mathematiker sprechen hier von dem Repräsentanten einer Äquivalenzklasse). Formeln wie $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ spiegeln dann weitere Abstraktionsschritte wider: die Zeichen a, b vertreten hier nicht mehr bestimmte, sondern irgendwelche Zahlen.

Das, was wir ein Aussagenschema nennen, ist auf ganz ähnliche Weise entstanden. Im ersten Schritt fassen wir alle sprachlichen Erscheinungsformen — gesprochen, gedacht, geschrieben, in deutsch, italienisch oder hebräisch, in roter Tinte, mit Schreibmaschine oder gedruckt, heute oder gestern — zu einer Aussage zusammen. Dann sehen wir von rhetorischen und stilistischen Varianten ab (z. B. „Es entsteht eine neue Wetterlage oder auch nicht, sofern der Gockel auf dem Misthaufen seine typischen Laute ausstößt") und ordnen all diesen Sätzen dieselbe logische Form zu. Auf der nächsten Stufe repräsentieren wir inhaltlich völlig unterschiedliche Aussagen dieser logischen Form durch eine Aussagenschema. Auf diesem Abstraktionsniveau interessiert uns nur noch die logische Zusammensetzung der Gesamtaussage durch ihre Teilaussagen, der konkrete Inhalt der ursprünglichen Aussagen hat dann für unsere Betrachtungen keine Bedeutung mehr.

Gleich im nächsten Absatz gehen wir übrigens noch einen Schritt weiter: Wir fassen verschiedene Aussagenschemata unter gemeinsamen Gesichtspunkten zusammen. In anderen Zusammenhängen wird uns sogar nur noch interessieren, daß es sich bei gewissen Ausdrücken überhaupt um Aussagenschemata handelt (im Unterschied zu anderen Schreibfiguren wie „§ 146 StGB"). Wir verwenden dann „A", „B", … (nach Bedarf mit Index) als Mitteilungszeichen für beliebige Aussagenschemata.

Unsere Wetterprognose am Anfang dieses Abschnitts führte zu einem Aussagenschema mit einer besonderen Eigenschaft: gleichgültig, ob die Teilaussagen wahr oder falsch sind (genauer jetzt: bei jeder möglichen Zuordnung eines Wahrheitswertes zu den schematischen Teilaussagesymbolen kurz: bei jeder *Bewertung*) ist der Gesamtwahrheitswert des Aussagenschemas „w". Solche Aussageschemata heißen *tautologische* (auch: *allgemeingültige*) *Aussagenschemata* oder *Tautologien*. Tautologien sind die *Gesetze* der Aussagenlogik. Wichtige schon bei ARISTOTELES erwähnte — Gesetze sind:

$P \vee \neg P$	Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten
$\neg(P \wedge \neg P)$	Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch
$P \rightarrow P$	Gesetz der Identität

Es lohnt sich, über den Erkenntniswert und Status von Tautologien genauer nachzudenken. Umgangssprachliche Sätze, deren logische Form eine Tautologie ist, sind immer wahr, unabhängig davon, ob die elementaren Teilsätze wahr oder falsch sind. Jede Kombination der Wahrheit oder Falschheit der Teilsätze, also jede Zeile der zugehörigen Wahrheitstafel, beschreibt eine andere Situation der „Welt" (in unserem Beispiel: krähender Hahn und Wetteränderung, krähender Hahn ohne Wetteränderung, stummer Hahn und Wetteränderung, stummer Hahn ohne Wetteränderung). Für jede Situation ist dieser Satz eine wahre Beschreibung. In der philosophischen Tradition wird das so ausgedrückt: Tautologien (logische Gesetze) gelten „in jeder möglichen Welt", sie sind die „ewig wahren Sätze".

Da tautologische Sätze für alle Situationen gelten, lassen sie keine Rückschlüsse auf die spezielle Situation zu, anders ausgedrückt: Tautologien liefern keine Erkenntnisse über die Wirklichkeit. Deshalb hängt die Richtigkeit der Logik auch nicht von der empirischen Wirklichkeit ab, in der Terminologie KANTS: Die Gesetze der Logik gelten *a priori*.

WITTGENSTEIN schreibt dazu: „Nicht nur muß ein Satz der Logik durch keine mögliche Erfahrung widerlegt werden können, sondern er darf auch nicht durch eine solche bestätigt werden können“ (*Tractatus* 6.1222).

Gelegentlich wird behauptet, daß Tautologien, wenn schon nicht über die Wirklichkeit, so doch wenigstens Erkenntnisse über unsere Denkgesetze und deren Notwendigkeiten liefern. Aber auch hier ist Vorsicht geboten. Beispielsweise darf das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten $(P \vee \neg P)$ nicht so verstanden werden, daß damit *bewiesen* sei, daß immer ein Satz oder seine Negation gelte. Genaugenommen ist dieses Aussagenschema nur deswegen eine Tautologie, weil

1. vorher die Annahme gemacht wurde, daß eine Aussage entweder wahr oder falsch ist (siehe S. 1), und weil wir
2. die Zeichen $\vee$ und $\neg$ in einer bestimmten Weise definiert haben.

Das, was scheinbar bewiesen wird, steht in Wahrheit schon in der Voraussetzung. Für die anderen logischen Gesetze gilt das in ähnlicher Weise. Die Tautologien stellen also keine echten Erkenntnisse dar, sie können höchstens die unterschiedliche Ausgestaltung und Entfaltung der vorher getroffenen Annahmen und Definitionen vor Augen führen, insofern handelt es sich um analytisch wahre Sätze. Allein die über die Verwendung der Zeichen P, Q, $\rightarrow$, $\wedge$ usw. getroffenen Vereinbarungen reichen aus, um die „Wahrheit“ eines solchen Schemas feststellen zu können. Werden nun auf Grund solcher Annahmen und Definitionen bestimmte Aussagenschemata als „ewig wahre Sätze“ ausgezeichnet, so sagt das da ja auch andere Möglichkeiten bestehen weniger etwas über „notwendige Denkgesetze“ als vielmehr über die Ansichten aus, die jene von der Welt und ihre Darstellung durch Sprache haben, die diese Annahmen machen. Anders gesagt: die Logik ist nicht voraussetzungslos, in ihren Aufbau gehen z. B. ontologische oder metaphysische Grundannahmen ein. Auf dieses Problem können wir hier allerdings nicht genauer eingehen. Die wesentliche Bedeutung der Tautologien ist eine bloß „technische“, sie wird im folgenden Abschnitt 4 und insbesondere im Abschnitt 6.2 behandelt.

Zum Aussagenschema $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \leftrightarrow \neg P$ gehört die Wahrheitstafel:

P	Q	(P → Q)	→ P)	↔	¬ P
w	w	w	w	f	f
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	f	w
f	f	w	f	f	w
		(1)	(2)	(4)	(3)

Der Gesamtwahrheitswert ist für jede mögliche Bewertung immer „f“. Solche Aussagenschemata heißen *kontradiktorische* (auch: *unerfüllbare*) *Aussagenschemata*. Speziell ist jede Negation einer Tautologie kontradiktorisch (und umgekehrt). Sätze, deren logische Form eine Kontradiktion ist, gelten in keiner „möglichen Welt“, daher liefern auch sie keine Informationen über die Wirklichkeit. Aussageschemata, die nicht kontradiktorisch sind, müssen bei mindestens einer Bewertung den Wahrheitswert „w“ haben, wir nennen sie daher *erfüllbare Aussagenschemata*. Jedes tautologische Aussagenschema ist erfüllbar, andererseits gibt es (beliebig viele) erfüllbare, die nicht tautologisch sind. Während sich in Sätzen, deren logische Form eine Tautologie oder eine Kontradiktion ist, die Wahrheit (bzw. Falschheit) des Satzes allein auf Grund seiner Form bestimmen läßt, wenn man die darin vorkommenden Zeichen und ihre Verwendungsregeln kennt, gelingt das bei Sätzen, deren Form erfüllbare, aber nicht tautologischer Aussagenschemata sind, nicht. Im allgemeinen muß bei solchen Sätzen zusätzlich ein Vergleich mit der Wirklichkeit erfolgen; nur solche Sätze können daher empirischen Gehalt haben.

Aufgaben

Untersuchen Sie mittels einer Wahrheitstafel, ob die folgenden Aussageschemata erfüllbar, tautologisch oder kontradiktorisch sind:

a) $(\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}) \rightarrow \neg\,\mathrm{P}$
b) $(\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q}) \vee \neg\,\mathrm{Q}$
c) $\neg\,\mathrm{P} \vee (\mathrm{P} \leftarrow \mathrm{Q})$
d) $\neg\,(\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q} \vee \mathrm{P})$
e) $\neg\,(\neg\,\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \rightarrow \mathrm{P}$
f) $(\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q}) \vee (\mathrm{P} \succ\!\!\!\prec \mathrm{Q})$
g) $\neg\,(\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}) \wedge \mathrm{Q}$
h) $((\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}) \rightarrow \mathrm{P}) \rightarrow \mathrm{P}$
i) $((\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{R}) \rightarrow \mathrm{P} \wedge \mathrm{R}) \vee (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R})$

5 Aussagenlogische Äquivalenz

Wenn jemand seinen Hausrat gegen Diebstahl und/oder Brand versichert hat und einen Wasserschaden der Versicherung meldet, so wird diese die Schadensregulierung mit dem Hinweis ablehnen: es ist nicht der Fall, daß es sich um einen Diebstahl oder um einen Brandschaden handelt. Eventuell wird auch die Formulierung gewählt: es handelt sich nicht um einen Diebstahl und nicht um einen Brandschaden. Sind beide Formulierungen gleichwertig? Wir prüfen das, indem wir für die Aussagenschemata $\neg\,(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q})$ und $\neg\,\mathrm{P} \wedge \neg\,\mathrm{Q}$ die Wahrheitstafeln aufstellen:

P	Q	$\neg$	$(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q})$	$\neg\,\mathrm{P}$	$\wedge$	$\neg\,\mathrm{Q}$
w	w	f	w	f	f	f
w	f	f	w	f	f	w
f	w	f	w	w	f	f
f	f	w	f	w	w	w
		(2)	(1)	(1)	(3)	(2)

Die Wahrheitswerte beider Schemata sind für jeden möglichen Fall gleich, in logischer Hinsicht ändert sich also nichts, wenn man das eine Aussagenschema durch das andere ersetzt. Aussagenschema, die man in diesem Sinne unbedenklich gegeneinander austauschen kann, heißen aussagenlogisch *äquivalent*.

Um zu prüfen, ob zwei Aussagenschemata äquivalent sind, muß man den Wahrheitswert der Schemata in jeder Zeile (also bei jeder Bewertung) miteinander vergleichen. Nun gibt es einen Junktor, der das Ergebnis dieses Vergleichs genau wiedergibt. Ein Aussagenschema mit $\leftrightarrow$ als Hauptjunktor ist nämlich genau dann wahr, wenn beide Teilschemata denselben Wahrheitswert haben. In unserem Beispiel oben können wir also auch untersuchen, ob das Aussagenschema

$$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$$

in jeder Zeile den Wahrheitswert „w" hat:

P	Q	$\neg$	$(P \vee Q)$	$\leftrightarrow$	$\neg P$	$\wedge$	$\neg Q$
w	w	f	w	w	f	f	f
w	f	f	w	w	f	f	w
f	w	f	w	w	w	f	f
f	f	w	f	w	w	w	w
		(2)	(1)	(6)	(3)	(5)	(4)

Da die Wahrheitswerte der Teilschemata in jeder Zeile übereinstimmen, erscheint unter der Hauptverknüpfung in jeder Zeile „w", das Gesamtschema ist also eine Tautologie. Dieser Zusammenhang wird für folgende Definition genutzt:

> Zwei Aussagenschemata A und B heißen genau dann aussagenlogisch äquivalent, wenn $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie ist.

Wir schreiben dann $A \Leftrightarrow B$. In dieser Schreibweise läßt sich das Ergebnis unserer Untersuchung so ausdrücken: es gilt

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$$

Sind die Aussagenschemata $\neg(P \wedge Q)$ und $\neg P \wedge \neg Q$ äquivalent, kann man also das Negationszeichen „ausklammern"?

P	Q	$\neg$	$(P \wedge Q)$	$\leftrightarrow$	$\neg P$	$\wedge$	$\neg Q$
w	w	f	w	w	f	f	f
w	f	w	f	f	f	f	w
f	w	w	f	f	w	f	f
f	f	w	f	w	w	w	w
		(2)	(1)	(6)	(3)	(5)	(4)

Es handelt sich um keine Tautologie, die beiden Aussagenschemata sind also nicht äquivalent.

Ein weiteres Beispiel. Lehrer zum Schüler: „Wenn Du abschreibst, bekommst Du eine Sechs!". Der Schüler denkt sich: „Entweder ich lasse das Abschreiben sein oder ich bekomme eine Sechs". Sagen beide dasselbe? Wir überprüfen $P \rightarrow Q$ und $\neg P \succ\!\prec Q$ auf Äquivalenz.

P	Q	$(P \rightarrow Q)$	$\leftrightarrow$	$(\neg P$	$\succ\!\prec$ Q)
w	w	w	w	f	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	f
f	f	w	w	w	w
		(1)	(4)	(2)	(3)

Keine Tautologie, also keine Äquivalenz. Wie wir sehen, gibt es in Zeile 3 einen Unterschied zwischen den Formulierungen. Nach Aussage des Lehrers kann der Schüler auch eine Sechs bekommen (Q wahr), wenn er nicht abschreibt (P falsch), z. B. wenn die eigene Leistung des Schülers ungenügend ist (der Lehrer hat ja nicht „genau dann…, wenn…“ gesagt); der Schüler schließt diesen Fall aus. Mit Hilfe der Äquivalenz lassen sich sprachliche Umformulierungen auf logische Korrektheit überprüfen. Übereinstimmung besteht nämlich, wenn entweder der Schüler das nicht ausschließende „oder“ verwendet, oder der Lehrer den Junktor $\leftrightarrow$ benutzt:

P	Q	$(P \rightarrow Q)$	$\leftrightarrow$	$(\neg P$	$\vee$ Q)	$(P \leftrightarrow Q)$	$\leftrightarrow$	$(\neg P$	$\succ\!\prec$ Q)
w	w	w	w	f	w	w	w	f	w
w	f	f	w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	w	w	w	f	w	w	f
f	f	w	w	w	w	w	w	w	w
		(1)	(4)	(2)	(3)	(1)	(4)	(2)	(3)

Es gilt also $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$ und $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \succ\!\prec Q$

Es ist leicht einzusehen, daß die *Transitivität* der Äquivalenz gilt (Begründung als Übung):

Wenn $A \Leftrightarrow B$ und $B \Leftrightarrow C$, dann gilt auch $A \Leftrightarrow C$

Zum Abschluß noch eine wichtige Anmerkung. Die Zeichen $\leftrightarrow$ und $\Leftrightarrow$ stehen im engen Zusammenhang, aber es gibt einen entscheidenden Unterschied: $\Leftrightarrow$ ist kein Junktor! Der Junktor $\leftrightarrow$ verknüpft zwei Aussagen(schemata), das Ergebnis ist wieder ein(e) Aussage(nschema), der Wahrheitswert kann wahr oder falsch sein. Nur im Fall, daß das entstandene Aussagenschema eine Tautologie ist, wird das Zeichen $\Leftrightarrow$ verwendet. $A \Leftrightarrow B$ ist für irgendwelche Aussagenschema A und B nicht wieder ein Aussagenschema der Aussagenlogik, sondern eine Aussage *über* diese Aussagenschemata (anders gesagt: „$\Leftrightarrow$“ ist ein *metasprachliches* Zeichen für eine Relation zwischen Aussagenschemata).

Aufgaben

1. Ordnen Sie die folgenden Aussagenschemata jeweils unter das äquivalente Schema in der Tabelle ein:

   $\neg P \rightarrow Q$, $P \vee \neg Q$, $\neg P \succ\!\prec Q$, $Q \leftarrow \neg P$, $\neg P \leftrightarrow Q$, $\neg P \vee Q$,
   $P \leftrightarrow \neg Q$, $P \succ\!\prec \neg Q$, $\neg Q \rightarrow \neg P$, $\neg (P \succ\!\prec Q)$, $\neg Q \leftarrow \neg P$,

$\neg(\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q})$, $\neg(\mathrm{P} \rightarrow \neg \mathrm{Q})$, $\neg(\mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q})$, $\neg \mathrm{P} \rightarrow \neg \mathrm{Q}$, $\neg \mathrm{P} \leftarrow \neg \mathrm{Q}$,
$\neg(\neg \mathrm{Q} \leftarrow \mathrm{P})$, $\neg(\neg \mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q})$, $(\mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q}) \vee (\neg \mathrm{P} \wedge \mathrm{Q})$, $\neg(\neg \mathrm{P} \wedge \mathrm{Q})$,
$\neg(\neg \mathrm{P} \vee \neg \mathrm{Q})$, $(\mathrm{P} \rightarrow \neg \mathrm{Q}) \wedge (\neg \mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q})$, $(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \vee (\neg \mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q})$

$\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$	$\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}$	$\mathrm{P} \succ\!\prec \mathrm{Q}$	$\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}$	$\mathrm{P} \leftarrow \mathrm{Q}$	$\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q}$

Verdeutlichen Sie sich die Äquivalenzen an Hand geeigneter Beispielsätze!

2. Suchen Sie für die folgenden Sätze Verneinungen, die nicht mit einer Wendung wie „es stimmt nicht, daß . . . “ beginnen:

   a) Wenn die Löhne erhöht werden, steigen auch die Preise.
   b) Petra hat blonde Haare und graue Augen.
   c) Wenn man erkältet ist, dann hat man Fieber oder Schnupfen.
   d) Wenn jemand volljährig und Deutscher im Sinne des Grundgesetzes ist, dann ist er wahlberechtigt.

6 Vollständige Systeme

Ein Ergebnis des letzten Kapitels (einschließlich Übungen) ist, daß sich einzelne Junktoren durch die Kombination anderer Junktoren ersetzen lassen. Beispielsweise gelten die Äquivalenzen:

$$\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q} \Leftrightarrow \neg \mathrm{P} \vee \mathrm{Q}$$
$$\mathrm{P} \vee \mathrm{Q} \Leftrightarrow \neg(\neg \mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q})$$
$$\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q} \Leftrightarrow \neg \mathrm{P} \succ\!\prec \mathrm{Q}$$

Daran kann man nun die Frage anschließen, ob man alle[6] Junktoren durch einige wenige ausdrücken kann, und wenn ja, welche Junktoren das dann sind. Eine Menge von Junktoren, die diese Eigenschaft hat nennt man ein *vollständiges System* der Aussagenlogik.

Vollständige Systeme in diesem Sinne sind z. B. (ohne Nachweis):

[6] Im einfachsten Fall wird eine Aussage nur mit Hilfe einer einzigen Teilaussage gebildet. Diese kann wahr oder falsch sein, die Wahrheitstafeln für solche einstelligen Junktoren (wie z. B. der Negator) haben also zwei Zeilen. Als Verknüpfungsergebnis kann in jeder Zeile „w“ oder „f“ stehen, es gibt also $2 \cdot 2 = 4$ Möglichkeiten für *einstellige* Junktoren. Bei der Verknüpfung *zweier* Teilaussagen gibt es vier Möglichkeiten der Wahrheitswertverteilungen bei den Teilaussagen (also Wahrheitstafeln mit vier Zeilen). Da für das Verknüpfungsergebnis in jeder Zeile die Wahl zwischen „w“ und „f“ besteht, gibt es also dafür $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ verschiedene Wahrheitswertverläufe und entsprechend viele *zweistellige* Junktoren. Formal kann man auch Junktoren definieren, die mehr als zwei Teilaussagen zu einer Gesamtaussage verknüpfen. Bei einem dreistelligen Junktor gibt es $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ Wahrheitswertkombinationen für die Teilaussagen, für die Wahrheitstafel benötigt man also acht Zeilen (allgemein bei n-stelligen Junktoren 2^n Zeilen). Die Junktoren unterscheiden sich durch den Wahrheitswertverlauf der Gesamtaussage. In jeder Zeile kann „w“ oder „f“ stehen, insgesamt gibt es also $2^8 = 256$ verschiedene dreistellige Junktoren (2^{2^n} verschiedene n-stellige Junktoren). Selbst für kleine n ist ein vollständiger Überblick über alle Junktoren praktisch nicht mehr möglich (schon für $n = 5$ gibt es mehr als vier Milliarden Junktoren).

1.) $\neg$, $\wedge$ 2.) $\neg$, $\vee$ 3.) $\neg$, $\rightarrow$

Alle anderen Junktoren könnte man jeweils durch Kombinationen dieser Junktoren ersetzen. Man kommt sogar mit einem Junktor aus, z. B. mit „weder ..., noch ...“[7] (vgl. oben S. 3). Es gilt (Nachweis als Übung):

weder P noch P $\Leftrightarrow \neg$ P
weder (weder P noch P) noch (weder Q noch Q) $\Leftrightarrow$ P $\wedge$ Q
weder (weder P noch Q) noch (weder P noch Q) $\Leftrightarrow$ P $\vee$ Q
weder (weder (weder P noch P) noch Q) noch (weder (weder P noch P) noch Q) $\Leftrightarrow$ P $\rightarrow$ Q

Es ist sicher ein überraschendes Resultat, daß sich all die Wendungen wie “nicht“, „und“, „oder“, „wenn ..., dann ...“, „nur falls ..., so ...“ usw. durch die wiederholte Anwendung von „weder ..., noch ...“ ersetzen lassen. Eine rein sprachliche Untersuchung ohne formale Mittel hätte dieses Ergebnis wohl nicht ermöglicht. So gesehen sind die anderen Junktoren eigentlich überflüssig, allerdings sind die Aussageschemata bei Verwendung mehrerer Junktoren besser „lesbar“. Die größtmögliche Sparsamkeit (also die Beschränkung auf nur einen Junktor) führt ebenso zu unübersichtlichen Aussagenschemata wie eine zu große Vielfalt (auch hier erweist sich der berühmte Mittelweg als golden).

7 Aussagenlogische Schlüsse

Die bisher behandelten logischen Probleme spielen im Alltag meist keine Rolle. Viel häufiger wird die Logik benutzt (oder zumindest wird sich auf sie berufen), wenn es gilt, aus bestimmtem Aussagen (Tatsachen) weitere Aussagen abzuleiten, also beim (logischen) *Schließen*. Beispielsweise will jemand einem anderen klar machen, für wie töricht er dessen Verhalten hält, indem er sagt „Wenn man sich im Winter zu dünn anzieht, dann wird man krank, ist doch logisch“.

Ziel dieses Kapitels ist es, deutlich zu machen, daß man sich speziell bei diesem Beispiel nur sehr indirekt auf die Logik berufen kann. Ziel ist es weiter, dagegen die Art von Schlußfolgerungen herauszuarbeiten, die tatsächlich auf Grund *logischer* Gesetze gültig sind.

7.1 Logisches und inhaltliches Schließen

In seinem Buch „Der Name der Rose“ bringt Umberto Eco ein Beispiel für eine besonders scharfsinnige Schlußfolgerung: Kurz vor Erreichen der Abtei begegnen William und Adson einigen Männern. William beschreibt den Männern ein Pferd und wo sie es finden können, ohne das Pferd je gesehen zu haben und bevor ihm überhaupt etwas von seinem Verschwinden gesagt wird. Auf Adsons (und des Lesers) Frage, wie er das bloß habe wissen können,

[7] Die Verknüpfung „weder P, noch Q“ hat denselben Wahrheitswertverlauf wie $\neg$ (P $\vee$ Q), man nennt sie daher auch NOR-Funktion (*not or*). In der Literatur ist auch die Bezeichnung Peirce-Funktion üblich. Ein zweiter Junktor, der allein ein vollständiges System der Aussagenlogik bildet, läßt sich in der Umgangssprache durch „... nicht zugleich mit ...“ umschreiben (Wahrheitswertverlauf wie $\neg$ (P $\wedge$ Q); NAND-Funktion, Sheffer-Funktion).

antwortet er: „Am Kreuzweg zeichneten sich im frischen Schnee sehr klar die Hufspuren eines Pferdes ab, die auf den Seitenpfad zu unserer Linken wiesen. Schön geformt und in gleichen Abständen voneinander, lehrten sie uns, daß der Huf klein und rund war und der Galopp von großer Regelmäßigkeit, worauf sich auf die Natur des Pferdes schließen ließ und daß es nicht aufgeregt rannte wie ein scheuendes Tier. An der Stelle, wo die Pinien eine Art natürliches Dach bildeten, waren einige Zweige frisch abgeknickt, genau in fünf Fuß Höhe. An einem der Maulbeersträucher — dort, wo das Tier kehrtgemacht haben mußte, um den rechten Seitenpfad einzuschlagen mit stolzem Schwung seines prächtigen Schweifes — befanden sich zwischen den Dornen noch ein paar tiefschwarze Strähnen... Und du wirst mir doch nicht weismachen wollen, du habest nicht gewußt, daß dieser Seitenpfad zur Müllhalde führt; schließlich hatten wir bereits von der unteren Wegbiegung aus den breiten Strom der Abfälle steil am Hang zu Füßen des Ostturms gesehen, der eine häßliche Spur im Schnee hinterließ. Und wie die Kreuzung lag, konnte der Pfad nur in diese Richtung führen."

Bei der Frage, ob es sich um einen *logischen* Schluß handelt, muß erst die genaue Bedeutung dieses Begriffs geklärt werden. Wenn man das Wort „logisch" erklären soll, wird man wohl Umschreibungen wie „es kann gar nicht anders sein", „es ist notwendigerweise so", „es ergibt sich zwingend aus dem anderen" wählen. Daß im angeführten Beispiel diese Charakterisierungen nicht zutreffen, wird schon daran deutlich, daß bei einer Verfilmung dieser Episode alle Indizien durch das Aufnahmeteam inszeniert werden könnten, ohne daß wirklich ein Pferd den Weg entlang laufen müßte.

Auch der Schluß „Dieses Stück Metall wird durch einen Magneten nicht angezogen, folglich handelt es sich nicht um Eisen" erscheint uns nur deshalb als zwingend, weil wir bestimmte physikalische Gesetze als gültig annehmen. Selbst wenn wir unterstellen, daß diese Gesetze eine korrekte Beschreibung der Wirklichkeit sind, ist die Folgerung nicht im strengen Sinne notwendig, man kann sich eine „Welt" zumindest denken, in der andere Gesetze gelten. Anders im folgenden Dialog: „Anna ist in ihrem Büro oder auf dem Weg nach Hause", „Im Büro ist sie nicht", „Also muß sie auf dem Weg nach Hause sein". Hier ist der Schluß wirklich zwingend. Man kann die Wahrheit der einzelnen Sätze anzweifeln, man kann, wenn man die Sätze als wahr annimmt, dies für viel weniger „notwendig" halten als in unseren vorigen Beispielen (schließlich könnte Anna ja sonstwo sein), nur eins kann man nicht: bestreiten, daß der dritte Satz aus dem ersten und zweiten folgt. Ohne weitere inhaltliche Überlegungen, ohne Anna und ihre Lebensumstände zu kennen, muß man die Wahrheit des letzten Satzes zugeben, sofern man nur die Wahrheit der anderen Sätze unterstellt. Und genau das macht den Unterschied zwischen logischem und inhaltlichem Schließen aus.

7.2 Aussagenlogisch gültige Schlußschemata

Während es in der philosophischen Diskussion bisher nicht gelungen ist, Übereinstimmung darüber zu erzielen, wann ein inhaltlicher Schluß zwingend, naheliegend oder auch nur wahrscheinlich ist, lassen sich aussagenlogisch gültige Schlüsse ganz eindeutig bestimmen. Da bei ihnen inhaltliche Überlegungen keine Rolle spielen, kann man Schlüsse von gleicher logischer Form zu einem *Schlußschema* zusammenfassen. Die Aussagen(schemata), aus denen der Schluß gezogen wird, werden üblicherweise *Prämissen*, die Schlußfolgerung wird auch *Konklusion* genannt. Statt der Worte „also", „folglich" o.ä. setzen wir dazwischen einen Strich. Das Schlußschema für unser letztes Beispiel sieht dann so aus:

$$\begin{array}{l} P \vee Q \\ \neg P \\ \hline Q \end{array}$$

Mit dieser Terminologie können wir jetzt definieren:

> Ein Schluß ist genau dann logisch gültig, wenn bei wahren Prämissen die Konklusion nicht falsch sein kann.

Offengelassen wird bei dieser Definition der Wahrheitswert der Konklusion bei falschen Prämissen. Sie kann in diesem Fall falsch sein, sie kann aber auch wahr sein, dann aber nicht wegen der Prämissen, sondern aus anderen Gründen (also nicht notwendigerweise, sondern „zufällig").

Diese Definition hat noch einen Nachteil: Sie gibt uns keine Handhabe, Schlußschemata (rein formal) auf logische Gültigkeit zu überprüfen. Es besteht allerdings eine gewisse Übereinstimmung zwischen dieser Definition und der Definition des Junktors $\rightarrow$:

P	Q	$P \rightarrow Q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Zwar handelt es sich hier um die Verknüpfung zweier Aussagen(schemata) zu einer(m) neuen Aussage(nschema), während beim logischen Schluß Prämissen und Konklusion nicht zu einer neuen Aussage zusammengefaßt werden, aber der Wahrheitswert der Subjunktion hängt auf die gleiche Weise vom Wahrheitswert der Teilaussagen ab wie die Gültigkeit des logischen Schlusses vom Wahrheitswert der Prämissen und der Konklusion. Es soll beim logischen Schluß ausgeschlossen sein, daß bei wahren Prämissen P_1, P_2 , ... , P_n — also wenn $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ wahr ist — die Konklusion (K) falsch ist (das würde der zweiten Zeile der Wahrheitstafel entsprechen). Dieser Fall ist ausgeschlossen, wenn es sich bei der entsprechenden Subjunktion um eine Tautologie handelt. „Falsch" kann dann als Verknüpfungsergebnis nicht mehr auftreten. Das legt folgende Definition nahe:

$$\text{Ein Schlußschema} \quad \begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ . \\ . \\ . \\ P_n \\ \hline K \end{array}$$

ist genau dann (aussagenlogisch) *gültig*, wenn $(P_1 \wedge P_2 \ldots \wedge P_n) \rightarrow K$ eine Tautologie ist.

In unserem Beispiel muß das Aussagenschema $(P \vee Q) \wedge \neg P \rightarrow Q$ überprüft werden:

P	Q	$(P \vee Q)$	$\wedge$	$\neg P$	$\rightarrow Q$
w	w	w	f	f	w
w	f	w	f	f	w
f	w	w	w	w	w
f	f	f	f	w	w
		(1)	(3)	(2)	(4)

Nur in der dritten Zeile sind beide Prämissen wahr, in diesem Fall kann aber die Konklusion nicht falsch werden. Das Aussagenschema ist eine Tautologie, das entsprechende Schlußschema (auch *modus tollendo ponens* genannt) ist aussagenlogisch gültig. Weitere wichtige, schon im Altertum bekannte, aussagenlogisch gültige Schlußschemata sind der sogenannte *modus (ponendo) ponens* (MP) und der *modus (tollendo) tollens* (MT):

MP: $$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ P \\ \hline Q \end{array}$$

MT: $$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ \neg Q \\ \hline \neg P \end{array}$$

Diese beiden Schemata machen deutlich, warum die eingangs angeführten Beispiele betreffs der unzureichenden Winterkleidung und des nichtmagnetischen Metalls im Alltagsverständnis als „logische“ Schlüsse empfunden werden. Man muß sich in beiden Fällen jeweils den Satz „Wenn man zu dünn angezogen ist, dann wird man krank.“ bzw. „Wenn ein Stück Metall Eisen enthält, dann wird es durch einen Magneten angezogen.“ (das entspricht dann dem „$P \rightarrow Q$“) als „stillschweigende“ Prämisse hinzudenken. Erst dann handelt es sich tatsächlich um (aussagen-) logisch gültige Schlüsse.

Um logisch gültige Schlußschemata von anderen abzugrenzen, setzen wir das Zeichen $\Rightarrow$ zwischen Prämissen und Konklusion und sagen dann, die Prämissen implizieren die Konklusion. Mit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ als Mitteilungszeichen für die Prämissen und B für die Konklusion läßt sich die Definition für aussagenlogisch gültige Schlußschemata auch so ausdrücken:

> $A_1, A_2, \ldots, A_n \Rightarrow B$ gilt genau dann, wenn $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$ eine Tautologie ist.

Mit dieser Terminologie können wir nun kurz sagen, daß folgende Implikationen gelten (weitere Beispiele finden sich in den Übungen):

$$P \vee Q, \neg P \Rightarrow Q$$
$$P \rightarrow Q, P \Rightarrow Q$$
$$P \rightarrow Q, \neg Q \Rightarrow \neg P$$

Bei längeren Argumentationsketten verwendet man häufig die Konklusion eines Schlusses als Prämisse einer weiteren Schlußfolgerung. Wenn nun bei wahren Prämissen die Konklusion des ersten Schlusses nicht falsch werden kann, ist das auch für die Konklusion des zweiten unmöglich, wenn es sich auch dabei um einen logisch gültigen Schluß handelt. Die Implikation ist daher transitiv:

> Wenn $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow C$, dann gilt auch $A \Rightarrow C$.

7.3 Fehlschlüsse

Ein Autofahrer wird von einer Polizeistreife angehalten und aufgefordert, sich einem Alkoholtest zu unterziehen. Auf sein erstauntes „Warum?“ wird ihm geantwortet: „Wenn man (eine gewisse Menge) Alkohol getrunken hat, fährt man Schlangenlinien. Sie sind Schlangenlinien gefahren. Folglich haben sie bestimmt einiges getrunken.“ Der Autofahrer findet seine Fahrweise überaus korrekt und wendet ein: „O. K., Sie haben völlig recht, mit Alkohol fährt man Schlangenlinien. Aber ich habe nichts getrunken, also kann ich nicht im Zickzack gefahren sein.“ Wir wollen hier nicht über die tatsächliche Fahrweise und den vorliegenden Alkoholkonsum entscheiden, sondern nur darüber, ob die Schlußfolgerungen logisch korrekt sind. Die zugehörigen Schlußschemata sehen so aus:

$$\begin{array}{l} \mathrm{P} \to \mathrm{Q} \\ \mathrm{Q} \\ \hline \mathrm{P} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \mathrm{P} \to \mathrm{Q} \\ \neg \mathrm{P} \\ \hline \neg \mathrm{Q} \end{array}$$

Wir stellen wieder für die entsprechenden Aussagenschemata die Wahrheitstafeln auf:

P	Q	$(\mathrm{P} \to \mathrm{Q})$	$\wedge$	$\mathrm{Q} \to \mathrm{P}$	$(\mathrm{P} \to \mathrm{Q})$	$\wedge$	$\neg \mathrm{P}$	$\to$	$\neg \mathrm{Q}$
w	w	w	w	w	w	f	f	w	f
w	f	f	f	w	f	f	f	w	w
f	w	w	w	f	w	w	w	f	f
f	f	w	f	w	w	w	w	w	w
		(1)	(2)	(3)	(1)	(3)	(2)	(5)	(4)

Keine Tautologien, es handelt sich also nicht um gültige Schlüsse. Die Prämissen können wahr sein, ohne daß die Konklusion wahr ist (Zeile 3). Man kann auch Schlangenlinien fahren ohne Alkohol (etwa wegen eines anderen Rauschmittels oder nur so zum Spaß). Insofern schließen Polizist und Autofahrer falsch. Häufig sind solche Fehlschlüsse nicht leicht zu entdecken: „Angenommen das Weltall expandiert, dann müßte man bei allen weit entfernten Sternen eine Rotverschiebung im Spektrum finden. Nun ist genau das der Fall. Folglich expandiert das Weltall.“ Der Fehler beruht auch hier darauf, daß hier das „wenn ...,dann ...“ in der ersten Prämisse als „genau dann ..., wenn ...“ ($\leftrightarrow$) oder „nur dann ...,wenn ...“ ($\leftarrow$) aufgefaßt wird, (dann sind die Implikationen gültig) statt als Junktor $\to$ (es kann ja auch noch andere Erklärungen für die Rotverschiebung geben).

7.4 Der praktische Wert logischer Implikationen

Ein Mann befindet sich auf einer Party, um ihn herum finden hochgelehrte Gespräche statt. Nun überlegt er sich: „Ich kann mich am Gespräch beteiligen oder auch nicht. Wenn ich es tue, wird man mich für dumm halten. Wenn ich nicht mitrede, halten sie mich für arrogant. Folglich werden die mich für dumm oder arrogant halten. Weiter: Wenn man mich für dumm hält, werde ich nicht mehr eingeladen. Wenn sie mich für arrogant halten, werde ich auch nie wieder eingeladen. Also werde ich auf jeden Fall nicht wieder eingeladen.“ Kann man so schließen? Wie man leicht überprüfen kann, gelten die Implikationen

$(*)\qquad P \vee \neg P,\ P \to Q,\ \neg P \to R \Rightarrow Q \vee R$

$(**)\qquad Q \vee R,\ Q \to S,\ R \to S \Rightarrow S$

$(*)$ heißt das zusammengesetzte, $(**)$ das einfache Dilemma. Rein logisch sind die Schlußfolgerung des Partygastes also richtig. Trotzdem läßt sich mit Recht bezweifeln, daß er nie wieder eingeladen wird. Verstößt man mit solchen Zweifeln gegen die Logik, wo es sich doch um die Konklusionen eines logisch gültigen Schlusses handelt?

Bei logisch gültigen Schlüssen ist die Konklusion wahr, wenn die Prämissen wahr sind. Falls aber mindestens eine Prämisse falsch ist, kann auch die Konklusion falsch sein. Die logische Gültigkeit eines Schlusses allein ist also nicht hinreichend für seine inhaltliche Richtigkeit. Zusätzlich muß durch inhaltliche (also nicht logische) Überlegungen die Wahrheit der Prämissen überprüft werden. Stellen Sie sich vor, der Partygast wäre sich nach solchen Überlegungen sicher, daß seine Prämissen wahr sind. Er wüßte dann, daß ihn die anderen für dumm oder arrogant (oder beides) hielten. Er wüßte weiter sicher, daß beide Möglichkeiten dazu führen, daß er nicht wieder eingeladen wird. Soweit die Prämissen. Daraus zieht er den Schluß, daß er nicht wieder eingeladen wird. Das wußte er nun eigentlich auch schon, ohne ausdrücklich diesen Schluß zu ziehen.

Auch bei allen anderen Schlüssen, die aus rein logischen Gründen richtig sind, ist es so, daß die Konklusion schon mehr oder weniger versteckt in den Prämissen enthalten ist. Daher ist es nicht möglich, mit Hilfe der Logik zu wirklich neuen Erkenntnissen zu gelangen. In der Konklusion wird nur etwas wiederholt (oder verdeutlicht), was in den Prämissen schon gesagt wurde. Da weiter — wie oben gezeigt — die Wahrheit der Konklusion nur gesichert ist, wenn die Wahrheit der Prämissen auf Grund inhaltlicher (also nicht logischer) Überlegungen feststeht, stellt sich die Frage, welchen praktischen Wert die Logik eigentlich hat.

Abgesehen von der Vermeidung von Fehlschlüssen ist es eine wichtige Aufgabe der Logik, die „Implikationen“, die in einem oder in mehreren Sätzen stecken, zu verdeutlichen, oder aber überhaupt erst bewußt zu machen. Zur Illustration ein Beispiel (für dessen formale Lösung allerdings die Mittel der Aussagenlogik nicht ausreichen):

Bei Mond- und Sonnenfinsternissen bilden Sonne, Erde und Mond (bzw. Erde-Mond-Sonne) eine gerade Linie, weil nur so der Erdschatten auf den Mond (bzw. der Mondschatten auf die Erde) fallen kann. Also muß bei einer Mondfinsternis die sonnenbeschienene Seite des Mondes dem Betrachter zugewandt sein (bei einer Sonnenfinsternis die unbeleuchtete Seite). Folglich kann eine Mondfinsternis nur bei Vollmond, eine Sonnenfinsternis nur bei Neumond stattfinden. Diese Schlußfolgerung steckt zwar schon in der Prämisse (die Stellung der Himmelskörper zueinander) und ist deshalb keine „neue“, zusätzliche Erkenntnis, aber das ist nicht ohne weiteres deutlich und vielen Menschen wohl auch nicht bewußt. Ähnlich lassen sich mittels logischer Untersuchungen und Schlüsse die in einer wissenschaftlichen Theorie oder auch in einem juristischen Regel- oder Vertragswerk versteckten Folgerungen herausarbeiten.

Aus einer oder mehr Prämissen lassen sich recht unterschiedliche Konklusionen ableiten. Hier nur ein sehr einfaches Beispiel: Welche Schlüsse lassen sich (rein logisch) aus dem Satz „Wenn ich mit dir zusammen bin, dann bin ich glücklich“ ziehen?

Das Schema $P \to Q$ impliziert u. a. die Schemata

(1)	$\neg Q \rightarrow \neg P$	(4)	$\neg Q \rightarrow \neg (P \wedge Q)$
(2)	$\neg P \vee Q$	(5)	$\neg Q \rightarrow (P \leftarrow Q)$
(3)	$\neg (P \wedge \neg Q)$		

(aber nicht die Schemata $\neg P \rightarrow \neg Q$ und $Q \leftarrow P$).

In der Logik läßt sich rein formal eine Übersicht über alle Konklusionen gültiger Schlüsse bei gegebenen Prämissen gewinnen. Dieses Problem kann auch umgekehrt gelöst werden: Zu einer angenommenen Konklusion lassen sich alle Prämissen finden, die die Konklusion implizieren. Folgende Schemata (neben anderen) implizieren unser(en) Beispielsatz(schema):

(1)	$\neg Q \rightarrow \neg P$	(5)	Q
(2)	$\neg P \vee Q$	(6)	$\neg P$
(3)	$\neg (P \wedge \neg Q)$	(7)	weder P, noch Q
(4)	$P \wedge Q$		

Daß die Implikationen mit den Prämissen (5), (6) bzw. (7) gelten, mag überraschen (Übung: „Rückübersetzung“ in die Umgangssprache!), aber auch hier ist es so, daß bei wahrer Prämisse das Schema $P \rightarrow Q$ nicht falsch werden kann.

Die Untersuchung logischer Schlußschemata ermöglicht es auch, unausgesprochene Annahmen, also „versteckte“ Prämissen in Argumentationen aufzuspüren. Ein Beispiel:

> „Wenn die Löhne nur wenig erhöht werden, können die Unternehmer mehr investieren. Also sichern maßvolle Lohnabschlüsse die Arbeitsplätze.“

Um das zugehörige Schlußschema

$$\frac{P \rightarrow Q}{P \rightarrow R}$$

auf Gültigkeit zu untersuchen, betrachten wir die Wahrheitstafel

P	Q	R	$(P \rightarrow Q)$	$\rightarrow$	$(P \rightarrow R)$
w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f
w	f	w	f	w	w
w	f	f	f	w	f
f	w	w	w	w	w
f	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w
			(1)	(3)	(2)

Keine Tautologie, kein gültiger Schluß. Bei wahrer Prämisse kann die Konklusion falsch sein, und zwar, wenn Q wahr und R falsch ist (Zeile 2). Wer wie im Beispiel argumentiert, schließt für sich diesen Fall offenbar aus, d. h. es wird die zusätzliche Prämisse $Q \rightarrow R$ als wahr angenommen („Höhere Investitionen sichern die Arbeitsplätze"). Tatsächlich gilt die Implikation

$$P \rightarrow Q,\ Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R.$$

Gegner dieser Argumentation können diese versteckte Zusatzannahme selbstverständlich bezweifeln. Dazu muß sie allerdings erst einmal offen gelegt werden. Selbst wenn die Prämissen als wahr angenommen werden, taugt das Argument übrigens nicht dafür, bei hohen Lohnabschlüssen eine Gefährdung der Arbeitsplätze zu behaupten: aus $P \rightarrow Q$, $Q \rightarrow R$ folgt nicht $\neg P \rightarrow \neg R$. Es wurde in den Prämissen ja nicht die „nur wenn …, dann …" Verknüpfung ($\leftarrow$) behauptet.

Aufgaben

1. Prüfen Sie, ob es sich um aussagenlogisch gültige Schlüsse handelt:

   a) Wenn ich fleißig bin, falle ich nicht durch die Prüfung.
   Ich bin nicht fleißig.
   Also falle ich durch die Prüfung.

   b) Wenn kein Benzin im Tank ist, läuft der Motor nicht.
   Der Motor läuft.
   Also ist Benzin im Tank.

   c) Er schläft, oder er ist nicht zu Hause.
   Er schläft sicher nicht.
   Also ist er nicht zu Hause.

   d) Wenn der Dollar fällt, steigt der Goldpreis.
   Wenn die Inflation sich verstärkt, fällt der Goldpreis nicht.
   Der Dollar steigt.
   Also verstärkt sich die Inflation nicht.

   e) Wenn der Dollar steigt, fallen die Zinsen nicht.
   Bei fallenden Zinsen wird die Baukonjunktur belebt.
   Also wird, sofern der Dollar steigt, die Baukonjunktur nicht belebt.

2. Prüfen Sie die folgenden Schlußschemata auf aussagenlogische Gültigkeit:

   a) $\dfrac{\neg P \lor Q \quad \neg P}{\neg Q}$ b) $\dfrac{P \rightarrow \neg Q \quad Q}{\neg P}$ c) $\dfrac{\neg P \rightarrow Q \quad P}{\neg Q}$

   d) $\dfrac{P \lor \neg Q \quad \neg P}{\neg Q}$ e) $\dfrac{P \rightarrow \neg Q \quad R \rightarrow Q}{R \rightarrow \neg P}$ f) $\dfrac{P \rightarrow Q \quad P \lor R \quad \neg Q}{R}$

3. Geben Sie zu den Prämissen gültige Konklusionen an:

a) $P \vee Q$	b) $P \wedge Q$	c) $P \leftrightarrow Q$
d) $\neg P \vee Q$ $Q \to R$	e) $P \to \neg Q$ Q	f) $P \vee \neg Q$ $R \to Q$ $\neg P$

4. Überprüfen Sie, ob es sich bei der folgenden Argumentation um einen aussagenlogisch gültigen Schluß handelt:

   Der Angeklagte hat an einer Sitzblockade teilgenommen.
   Wenn man an einer Sitzblockade teilnimmt, dann bewirkt man ein bestimmtes Verhalten (die Fahrer der Militärtransporter müssen anhalten).
   Wenn man Gewalt anwendet und (somit) ein bestimmtes Verhalten bewirkt, macht man sich der Nötigung schuldig. (§ 240 StGB).
   Also hat der Angeklagte sich der Nötigung schuldig gemacht.

   Welche Prämisse (abgesehen von „Wer an einer Sitzblockade teilnimmt, begeht eine Nötigung", weil das ja erst durch diesen Schluß bewiesen werden soll) muß man zusätzlich annehmen, damit es sich um einen gültigen Schluß handelt?

8 Ausblick auf die Quantorenlogik

In Logikbüchern wird gerne folgender Schluß als Beispiel angeführt, und auch wir wollen mit dieser schönen Tradition nicht brechen:

Alle Menschen sind sterblich
Sokrates ist ein Mensch
―――――――――――――――
Sokrates ist sterblich

Dieser Schluß ist gültig, aber nicht aussagenlogisch gültig. Das entsprechende aussagenlogische Schlußschema

$$\begin{array}{l} P \\ Q \\ \hline R \end{array}$$

ist nicht gültig, da das Aussagenschema $P \wedge Q \to R$ keine Tautologie ist.

Die Korrektheit dieses Schlusses beruht nicht — wie im letzten Kapitel — auf der Verknüpfung *kompletter* Sätze mittels Junktoren zu komplexeren Sätzen, sondern darauf, daß bestimmte Eigenschaften über einen oder mehrere „Gegenstände" (hier Menschen) ausgesagt werden, kurz: Es kommt auf die *innere* Struktur der *einzelnen* Aussagen an. Da — wie wir gesehen haben die logische Gültigkeit eines Schlusses ausschließlich von der logischen Form der Prämissen und der Konklusion abhängt, muß man hier auch die logische Form einzelner — nicht durch Junktoren verknüpfter — Aussagen herausarbeiten (also — um im Bild von Seite 1 zu bleiben — Atomphysik betreiben).

Für die erste Prämisse könnte das beispielsweise so aussehen:

Für alle „Dinge“ gilt: wenn das „Ding“ ein Mensch ist, dann ist das „Ding“ sterblich.

Zusätzlich zu den Junktoren der Aussagenlogik werden für solche Untersuchungen sogenannte *Quantoren* („für alle“, „mindestens ein“) verwendet, weiter muß berücksichtigt werden, daß für gewisse „Gegenstände“ (hier: Sokrates) bestimmte „Prädikate“ (hier: Mensch sein, sterblich sein) zutreffen (weshalb man bei dieser Erweiterung der Aussagenlogik oft auch von *Prädikatenlogik* spricht).

Auch hier trennt man sich dann völlig vom empirischen Gehalt, führt entsprechende Symbole ein — im Beispiel

$$\forall x(\mathrm{M}(x) \to \mathrm{S}(x))$$

— und kann dann ganz entsprechende Untersuchungen über Äquivalenzen, logische Gültigkeit von Schlüssen usw. allein auf Grund der (quantoren-) logischen Form vornehmen.

9 Logik und natürliche Sprache

Eine abschließende Bemerkung: Die künstlichen Sprachmittel der Logik sind präziser und für bestimmte Techniken geeigneter als die Umgangssprache. Darüber darf man nicht vergessen, daß die Umgangssprache über sehr viel größere Ausdrucksmittel verfügt. Die hier vorgestellte Aussagenlogik hat nur Aussagen zum Gegenstand, nur ihre Form, nicht ihren Inhalt. Kausale, zeitliche und viele weitere Verhältnisse zwischen Aussagen können nicht dargestellt werden, ganz abgesehen von vielen weiteren Möglichkeiten der Sprache: Dichtung, Poesie, Scherz, Satire, Ironie, Täuschung, Drohung, Schmeichelei, um nur einige Aspekte zu nennen. Die Logik hat nicht den Anspruch (und solch ein Vorhaben wäre auch unmöglich), die gesamte Sprache oder auch nur große Teile von ihr durch künstliche, exakte Sprachmittel zu ersetzen. Viele Ausdrucksmöglichkeiten der Umgangssprache beruhen gerade auf ihrer Mehrdeutigkeit. Die Logik hat einen sehr engen Anwendungsbereich, dort leistet sie dann aber erheblich mehr als die Umgangssprache.

Frege hat das Verhältnis von Sprache und Logik mit dem zwischen Auge und Mikroskop verglichen. Das Auge ist viel universeller, das Mikroskop dagegen in einem bestimmten Teilbereich viel leistungsfähiger. Ebenso wie beim Mikroskop kann man auch in der Logik auf einen technischen Apparat nicht verzichten, formale Exaktheit muß sein. Beim Bau und beim Gebrauch des Mikroskops ist allerdings letztlich das Auge nicht ersetzbar; und so wird man auch bei der formalen Logik immer an den Punkt kommen, wo man mit formalen Mitteln allein nicht auskommt und sich der natürlichen Sprache bedienen muß.