

Experimentelle Mathematik

**Beiträge des Arbeitskreises
„Entwicklung von Unterrichtsmodellen
zum Einsatz des Computers
im Rahmen einer experimentellen Mathematik
in Realschule und Gymnasium“**

**Zentralstelle für Computer im Unterricht
Augsburg**

1993

**Im Auftrag des
Bayerischen Staatsministeriums
für Unterricht und Kultus**

herausgegeben und bearbeitet von Detlev Kirmse

Zentralstelle für Computer im Unterricht, Schertlinstraße 9, 86159 Augsburg

Tel. (08 21) 57 30 11

Fax (08 21) 2 58 90 95

E-Mail zentralstelle@zs-augsburg.de

Internet <http://www.zs-augsburg.de>

1 Vorwort

Der Arbeitskreis „Entwicklung von Unterrichtsmodellen zum Einsatz des Computers im Rahmen einer experimentellen Mathematik in Realschule und Gymnasium“ arbeitete bis 1992 an der Zentralstelle für Computer im Unterricht, Augsburg. Der Veröffentlichung seiner umfangreichen Materialien standen damals technische Schwierigkeiten im Wege. Zu einem Zeitpunkt, wo PC noch unter MS-DOS liefen, standen weder geeignete Layoutprogramme noch ausreichende Hardware zur Verfügung. So konnten die einzelnen Beiträge damals nicht zu einer angemessen gestalteten Gesamtbroschüre zusammengefügt werden.

Die Herausgabe eines BUS-Themenhefts mit einer CD zum Thema „Computereinsatz im Mathematikunterricht“ war der Anlaß, diese Beiträge erneut durchzusehen. Dabei zeigte sich, daß die technische Entwicklung zwar große Fortschritte gemacht hat. Heute stehen Rechner mit der 100fachen Speicherkapazität und der 100fachen Prozessorgeschwindigkeit zur Verfügung. Bei der Software ist längst eine quasi normierte graphische Oberfläche (Windows in verschiedenen Versionen) verbreitet. Auch die damals verwendeten Programme kommen heute vielfach in neuem Gewand (auch Vivitab wird voraussichtlich im Herbst unter Windows95 erscheinen). Die damalige Rechenleistung und mathematische Software ist heute auf graphischen Taschenrechnern implementiert.

Dennoch sind grundlegende Ansätze einer „experimentellen Mathematik“ noch heute gültig, vielleicht mehr noch als damals. Rechner werden heute für den Schüler als Standardwerkzeug betrachtet. Die verwendeten Programmtypen sind die gleichen geblieben:

- Tabellenkalkulationssoftware im numerischen Bereich und für die Darstellung von Graphen
- Zuggeometrieprogramme für geometrische Anwendungen
- Computeralgebrasoftware für umfangreiche numerische Berechnungen
- spezielle Unterrichtssoftware für bestimmte Zwecke und Themen

Lediglich setzt man heute in Schulversuchen verstärkt CAS zur symbolischen Manipulation im Unterricht ein.

Manche damalige Ansätze haben sich nicht in der erwarteten Weise durchgesetzt. Die Rolle des Programmierens in einer höheren Programmiersprache hat an Bedeutung verloren. Auch um das Modethema „Fraktale und Chaos“ ist es ruhiger geworden.

Dennoch sei der Leser aufgefordert, zu prüfen, wie weit er diese Anregungen heute für seinen Unterricht umsetzen kann. Dabei dürfen manche der damaligen Ansätze durchaus kritisch gesehen werden. Angesichts neuer Betriebssysteme und graphischer Oberflächen ist in einigen Fällen die Übertragung auf eine heutige informationstechnische Sprechweise angebracht.

Detlev Kirmse

Augsburg, Mai 1999

Kapitel		Seite
1	Vorwort	3
2	Inhaltsverzeichnis	4
3	Einführung	6
4	Algebra	10
4.1	Regeln Finden in Q	10
4.2	Diophantische Gleichungen	13
4.3	Lineare Gleichungssysteme	23
4.4	Lineare Gleichungssysteme - graphische Lösung	32
4.5	Lösen von Mischungsaufgaben mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms	37
4.6	Lineare Optimierung	40
4.7	Lösen von Gleichungen durch Iteration	45
4.8	Lösen einer Gleichung 3. Grades, Lösen einer transzendenten Gleichung	48
5	Funktionen	51
5.1	Treffer	51
5.2	Funktionen und Funktionenscharen	53
5.3	Elementare Rechnungen zu Wachstumsprozessen	56
5.4	Parameterdarstellung von Kurven	60
5.5	Elementares Näherungsverfahren zur maschinellen Bestimmung von $\sin x$	63
5.6	Flächenberechnung: Sehnen-Trapez-Verfahren	65
5.7	Zahlenfolgen: Darstellung am Computer	67
5.8	Intervallhalbierung: ein universeller Algorithmus	70
5.9	Wurzelberechnung: Heronverfahren	74
6	Geometrie	75
6.1	Geometrie am Bildschirm	75
6.2	Cabré Geomètre	80
6.3	Translation	86
6.4	Geolog	89
6.5	Konstr	92
6.6	Abbilden	94
6.7	Polyeder: Regelmäßige Körper in Rotation	95
6.8	Kugel	98
6.9	Figurengeometrie mit Turtlegraphik	100
6.10	Abbilden mit Standardsoftware	106
6.11	Kugelvolumen	109
6.12	Geometrische Extremwertaufgaben	114
6.13	Konstruieren eines Dreiecks mit Umkreis < und anschließender Drehung	122
6.14	Der Randwinkelsatz mit Pictures	124

Kapitel		Seite
7	Experimente mit dem Zufall	126
7.1	Würfeln	126
7.2	Monte-Carlo-Würfe zur Lösung von Flächen- und Raumproblemen	131
7.3	Random Walk - Spaziergänge zu den Lösungen	133
7.4	Optimieren durch stochastisches Suchen	136
7.5	Systeme mit festen Übergangswahrscheinlichkeiten	139
8	Fächerübergreifende Themen	140
8.1	Wie Bilden laufen lernen - zur Didaktik der dynamischen Modellierung	140
8.2	Temperaturverteilung im Wohnraum	146
8.3	Wärmespeicher für die Nutzung der Sonnenenergie	149
8.4	Verkehrsfluß und Geschwindigkeit im Straßenverkehr	152
8.5	Stufenweise Entwicklung eines dynamischen Modells	154
9	Fraktale und Chaos	169
9.1	Wege in die fraktale Geometrie	169
9.2	Logistisches Wachstum	183
9.3	Selbstähnlichkeit fraktaler Gebilde am Beispiel	191
9.4	Selbstähnliche Figuren mit Turtle-Graphik	195
10	Anhang	206
10.1	Mitglieder des Arbeitskreises	206
10.2	Software	206

3 Einführung: Experimentelle Mathematik

Experimentelle Mathematik - ein scheinbarer Widerspruch! Einerseits das wohlgefügte, feste Gebäude der Mathematik, andererseits der weiche und unsichere Begriff des Experiments? Diese Spannung in der Überschrift ist wohl beabsichtigt und als Leitlinie für den Unterricht in der Schule mit deutlichem Hintersinn gewählt.

Die schnelle Entwicklung der Informationstechnologie bietet gerade für die Mathematik überraschende neue Werkzeuge und Einsatzmöglichkeiten des Computers. So setzte sich ein Arbeitskreis aus Mathematiklehrern des Gymnasiums und der Realschule an der Zentralstelle für Computer im Unterricht, Augsburg, daran, Möglichkeiten eines Mathematikunterrichts unter Einsatz moderner Werkzeuge auszuloten. Dabei sollten Erfahrungen, die mit dem Computer im Unterricht gemacht wurden, ebenso zusammengetragen werden wie neue Ideen und Anregungen formuliert werden. Als Zeitraum für einen sinnvollen Computereinsatz wurden die Jahrgangsstufen 8 bis 10 an der Realschule bzw. bis 11 am Gymnasium gesehen, in Einzelfällen auch schon früher. Man ging dabei vom existierenden Lehrplan in den beiden Schularten aus und suchte dort Themen, bei denen der Rechneinsatz einen Nutzen versprach.

Die Themen gliedern sich in folgende Bereiche:

- Algebra
- Funktionen
- Geometrie
- Stochastik
- Fächerübergreifende Themen
- Fraktale und Chaos.

Bis auf das letzte, heute recht aktuelle Thema sind diese Bereiche Bestandteil des klassischen Mathematikunterrichts. Dennoch verspricht auch dort der Computereinsatz einen vielfältigen Nutzen und eine Bereicherung.

3.1 Entdeckendes Lernen in der experimentellen Mathematik

Die Verwendung eines Software-Werkzeugs in der Hand des Schülers setzt den Lernenden in die Lage, selbstgesteuert Weg und Geschwindigkeit seines Lernfortschritts zu bestimmen. Der Unterricht wird schülerzentriert. Erkenntnisse werden durch mehr oder weniger zielgerichtetes strategisches Vorgehen und systematisches Suchen, aber mitunter auch durch spielerisches Probieren erzielt oder zumindest vorbereitet. Ergebnisse können durch (durchaus auch fehlerbehaftetes) Üben verbessert und gefestigt werden. Der Computer unterstützt dies insbesondere durch seine „geduldige“ und „korrekte“ Reaktion auf (formal fehlerfreie) Eingaben des Schülers. Dieses Lernen unterscheidet sich deutlich vom herkömmlichen, stark lehrerzentrierten Unterricht, bei dem aus organisatorischen Gründen ein Lernen „in gleicher Front“ angestrebt wird. Stattdessen hat hier der Lernende eine größere Eigenverantwortung hinsichtlich der Wahl seines Weges und der aufeinanderfolgenden Einzelschritte, selbstgesteuerte Eigentätigkeit statt passivem „Lernkonsum“ ist verlangt.

3.2 Werkzeugeinsatz für klassische didaktische Ziele

Während herkömmliche Mathematikstunden oft zu einer vom Lehrer angestrebten Erkenntnis konvergieren, die die Schüler nachvollziehen mögen oder auch nicht, strebt experimentelle Mathematik offenere Strategien an. Das elektronische Werkzeug dient zur

Überprüfung vielfältiger Hypothesen und regt damit eine viel offenere Heuristik an. Statt bisher auf die kompetente Antwort des Lehrers angewiesen zu sein, können nun schnell mehrere Vermutungen durchgerechnet und so von „dritter“ und „unbestechlicher“ Seite bestätigt oder widerlegt werden. Auch alternative Lösungswege zu dem z. B. im Lehrbuch vorgegebenen können spontan probiert werden.

Das geeignete Werkzeug kann dazu dienen, mathematische Zusammenhänge zu dynamisieren. Statt ein einziges Beispiels von Hand an der Tafel durchzurechnen und evtl. zu zeichnen, können schnell ganze Klassen von Fällen am Computer berechnet und graphisch dargestellt werden (Kap. 5). Ein Funktionenplotter z. B. kann leicht eine ganze Schar von Funktionsgraphen darstellen und so ihre Abhängigkeit von einem oder mehreren Parametern zeigen. Diese Dynamisierung bedeutet nicht nur einen Zeitgewinn, sondern auch den Ansatz zur Bildung und Festigung der Abstraktion. Zudem kann die motivierende Fragestellung: „was geschieht, wenn ...“ nach dem Einfluß von Parametern sofort beantwortet werden.

Auch die Visualisierung durch graphische Darstellung von Funktionen, aber auch von geometrischen Objekten am PC ist ein vielversprechendes Hilfsmittel. An erster Stelle sei hier die Zuggeometrie genannt (Kap. 6). Geometrische Figuren werden am Bildschirm entworfen und konstruiert. Danach können ihre Eingabedaten, z. B. Eckpunkte, Seiten, Winkel, interaktiv durch „Ziehen mit der Maus“ verändert werden. Alle Folgeobjekte, die darauf basierend konstruiert wurden, und damit die ganze Zeichnung verändern sich folgerichtig sofort mit. Die in der Konstruktion verwendeten logischen Zusammenhänge bleiben erhalten. Die Form verändert sich zwar,

die innere Struktur bleibt jedoch bestehen.

Dieses Vorgehen dürfte die mathematische Begriffsbildung wesentlich unterstützen. Der Weg geht nicht nur vom dargebotenen abstrakten Begriff zur (zeichnerischen) Veranschaulichung, sondern auch umgekehrt von einer dynamischen Repräsentation eines Objekts in unterschiedlicher Form hin zur Abstraktion gemeinsamer „Konstanten“.

3.3 Software als Mittel zur mathematischen Modellierung

Ein wesentlicher Schritt im Mathematikunterricht besteht darin, zu einem vorliegenden konkreten Sachverhalt eine zutreffende mathematische Beschreibung zu finden. Hier bieten sich durch die numerischen, graphischen und algebraischen Werkzeuge am PC neue Möglichkeiten, aber auch Aufgaben. Der Kanon von Lerninhalten der „Informationstechnische Grundbildung“ (ITG) an weiterführenden Schulen enthält hierfür handwerkliche Voraussetzungen. Erworben werden diese aber u. a. im Mathematikunterricht, z. B. durch Einsatz eines Tabellenkalkulationsprogramms. Auch die Formulierung eines Algorithmus in einer formalen Programmiersprache zählt zu informatischen Fähigkeiten, die im Mathematikunterricht zwar nicht grundlegend erworben, aber sinnvoll angewandt und gefestigt werden. Erst mit solchen Kenntnissen ist ein Absolvent der Schule in einem späteren Aufgabenfeld in der Lage, leistungsfähige Computerwerkzeuge sinnvoll anzuwenden. Darin Kompetenz zu fördern, ist in Zukunft sicher eine wichtige Aufgabe der Schule.

Aber auch für den Mathematikunterricht selbst bilden neue Werkzeuge eine Bereicherung des mathematischen Modellierens. Neben dem kritischen

Einsatz numerischer Werkzeuge sei der Bereich der Modellbildung und Simulation dynamischer Systeme genannt (Kap. 8). Hier wird, basierend auf dem Werkzeug Computer, ein ganzheitlicher und sogar fächerübergreifender Weg aufgezeigt zur Beschreibung und Manipulation sog. dynamischer Systeme, d. h. recht realistischer Ausschnitte der Welt um uns unter mathematischer Sicht. Begriffe wie Integration und Differenzen- oder Differentialgleichungen werden schon für Schüler in Sek. I angemessen konkret veranschaulicht und präpedeutsch behandelt.

3.4 Parallele zum naturwissenschaftlichen Experiment

Auch eine direkte Interpretation des Attributs „experimentell“ sei erwähnt. Wie in den eigentlichen Naturwissenschaften soll das Experiment dem Erkenntnisgewinn dienen. Am konkreten Fall werden am Rechner „Versuchsreihen“ durchgeführt, Gemeinsamkeiten der Ergebnisse analysiert und eine Hypothese formuliert. Diese kann dann durch rechnergestützte Veranschaulichung zumindest plausibel gemacht und je nach verfügbarem mathematischem Rüstzeug bewiesen werden. Somit kann auch ein induktives Vorgehen im Fach Mathematik trainiert und damit eine Tendenz unterstützt werden, wie sie heute in der Praxis von Forschung und Technik angewandt wird.

3.5 Offener Ansatz

Über diese methodischen und didaktischen Ansätze hinaus soll experimentelle Mathematik den Lehrer anregen. Die absichtlich häufig offenen Ansätze lassen viel Spielraum und sollen zu eigenem Experimentieren motivieren. Welchen Weg der Mathematikunterricht in Zukunft nehmen wird, ist offen. So sei

hier um Verständnis gebeten, wenn nicht alle aufgeführten Unterrichtsvorschläge der Kritik einer strengen Didaktik und Prüfung durch die Praxis standhalten werden. Auch in diesem Sinne sind die Beispiele experimentell gemeint.

Ganz bestimmt wird ein Wechsel der Werkzeuge nicht nur eine Änderung der Methoden zur Folge haben. Vielmehr werden mit neuen Arbeitsmitteln auch neue ganz Themenbereiche in den Horizont des in der Schule Angebrachten rücken. Ob z. B. die fraktale Geometrie und die aktuelle Theorie des deterministischen Chaos solche Hoffnungen berechtigt, muß diskutiert werden.

3.6 Technische Voraussetzungen

Für die Beispiele ist im allgemeinen ein PC/XT mit hochauflösender Grafik unter dem Betriebssystem MS-DOS ausreichend. Für einige Software ist die graphische Oberfläche GEM vorausgesetzt. Für den Einsatz zur Demonstration ist dazu eine Großbildprojektion, z. B. mit einem Display für den Tageslichtprojektor erforderlich. Wünschenswert ist in vielen Fällen aber, daß jeder Schüler oder zumindest Gruppen von zwei oder drei an einem PC arbeiten können. Viele Schulen sind heute mit mehreren Computerräumen ausgestattet. Hier sollte auch die Mathematik zumindest gelegentlich für einige Stunden Unterrichtsmöglichkeit finden.

Geeignete Software ist an vielen Schulen vorhanden, z. B. im Rahmen der Standardsoftware. Weitere Programme können an der Zentralstelle für Computer im Unterricht, Augsburg, kostenlos bezogen werden. Einige Software muß bei einschlägigen Firmen in Einzel- oder Klassenlizenz käuflich erworben werden. Manche Programme sind erfreulicherweise als Shareware oder Freeware mehr oder weniger frei verfügbar.

Ausgestattet mit Hard- und Software und den zahlreichen anregenden Beispielen wünscht der Arbeitskreis interessierten Lehrern ein nutzbringendes, aber auch unterhaltsames Experimentieren. Auch wenn der Weg noch offen und unsicher scheint, am Ende winken doch vielversprechende neue Erkenntnisse und vielleicht eine Weiterentwicklung von

Methodik und auch Didaktik eines oft als konservativ geltenden Schulfaches.

Detlev Kirmse

Augsburg, Oktober 1993

4 Algebra

4.1 Regeln Finden in Q

4.1.2 Arbeitsweise:

Der Schüler soll je nach Vorgabe des Lehrers für Summe, Differenz Produkt, Quotienten oder mehreres davon die

Rechnen in Q: die Summe		die Differenz	das Produkt	der Quotient	Ende
Summe in Q: Beispiel		Erläuterung	Aufgabe	bisher.Regeln	neue Regel
<i>Wenn</i>	die erste Zahl beide Zahlen	positives negatives	<i>und die zweite Zahl</i>	positives negatives	<i>Vorzeichen</i>
		das gleiche verschiedenes			
<i>haben, dann hat das Ergebnis als Vorzeichen</i>					
	ein Plus ein Minus das gleiche das der ersten Zahl das der betragsgrößeren das der ersten (außer sie ist die betragskleinere)				
<i>und als Betrag</i>			<i>der Beträge der beiden Zahlen</i>		
	die Summe die Differenz das Produkt den Quotienten				

Bild 4.1.1

4.1.1 Vorbemerkungen

Mit diesem Programm sollen Schüler selbständig die Regeln für das Rechnen mit positiven und negativen Zahlen experimentell erkunden. Zwei Schüler je Bildschirm dürften eine gute Arbeitsbasis sein. Als Hefteintrag während der Arbeit sind für jede Rechenart zwei Superregeln vorgesehen!

Start mit GWBASIC (oder BASICA)
load „QREGEL.BAS" run

(Programm ist leicht auch in andere Basic-Formen übertragbar. Autor: P. Rauschmayer)

Regeln formulieren. Ihn erwartet ein Menü, aus dem er mit den Pfeiltasten auswählen kann, was er als nächstes tun will. Die Steuerung liegt ganz bei ihm selbst.

4.1.3 Beispiele:

Der Schüler kann sich für Beispiele, die er selbst wählt, das Ergebnis anzeigen lassen, z. B.

$$(\quad) + (\quad) =$$

$(-15) + (+4) =$: er gibt in die Klammern nur die Zahlen ein und erhält als Ergebnis -11.

Auch Dezimalbrüche (mit . oder ,) und Brüche (mit / und als gemischte Zahl) sind zulässig und werden akzeptiert.

Wieviele Beispiele er wählt, ist ihm überlassen. Die vorhergehenden sind jedenfalls auf dem Bildschirm noch zu sehen. Geschickte Beispielwahl ist schon ein erstes, unerwähnt bleibendes Lernziel.

4.1.4 Erläuterung:

Zu jedem Beispiel kann er sich eine kurze Erläuterung abrufen, die seine Vorstellung stützt, ohne viel zu verraten, zu obigem Beispiel etwa käme: „im Keller auf einen Stuhl steigen“ und eine zusammenfassende Schreibweise, also $= -15 + 4$.

4.1.5 Aufgaben:

Sobald der Schüler meint, die Sache durchschaut zu haben, kann er sich Aufgaben stellen lassen, für die er die Lösung eingeben muß. Dabei kommt als Fehlermeldung nur „beachte die Vorzeichen“ und „erst noch kürzen“, sonst wird nur „richtig“ oder „falsch“ ausgegeben und die Aufgabe nicht wiederholt. Auch hier ist es seine Sache, wie viele Aufgaben er probieren will.

Dezimalbrüche und Brüche kommen gelegentlich vor, weil zwischen

$$(+10) - (-2) \text{ und } (+10) - (-2 \frac{1}{3})$$

gedanklich doch ein großer Unterschied besteht und nicht der Eindruck

entstehen soll, die Regeln gälten nur für ganze Zahlen.

Auch bei den Aufgaben sind die Erläuterungen abrufbar, und zwar dieselben wie bei den Beispielen.

4.1.6 Regeln Finden:

Ziel der Arbeit ist es, Regeln zu formulieren. Dafür werden in Untermenüs Bausteine angeboten.

Beim Aufbau der Regeln kann man beliebig in den Menüs auf und ab gehen, auch beliebig zwischen ihnen vor und zurück, fertig ist man erst, wenn aus jedem der Menüs eine Wahl getroffen wurde. (Das Menü für „die zweite Zahl“ verschwindet natürlich, wenn man im ersten Menü wählt „beide Zahlen“. Umgekehrt verschwinden aus dem 2. Untermenü „das gleiche“ und „verschiedenes“ wenn man wählt „die erste Zahl“).

4.1.7 Reaktion:

Als Antwort kommt die soeben formulierte Regel im vollständigen Wortlaut, ohne die Menüs. Dazu „diese Regel hast Du schon“, oder „falsch“, oder ein Hinweis, daß das Vorzeichen stimmt, nicht aber der Betrag (ein seltener Fehler, tritt wohl nur bei der Differenz auf). Sonst sind die Antworten lobend, z. B. „richtig, versuche es mit: Wenn beide...“. Wird dann unnötigerweise nicht „dasselbe Vorzeichen“ gewählt, sondern „Plus“ oder dergleichen, dann heißt die Reaktion „richtig, es geht aber noch klarer“.

4.1.8 Gewünschtes Ziel:

Das höchste Lob ergibt sich bei den Regeln „Wenn ... dasselbe ...“ oder „beide ... verschiedenes ...“. Für jede der vier Rechenarten sind zwei solche Superregeln möglich. Um das

Erfolgsenerlebnis und die Einprägbarkeit zu erhöhen, heißt es dann: „Schreibe Dir diese Regel in Dein Heft als: ...“ (z. B. Summe (g) für gleiche Vorzeichen).

Wenn jemand beide Superregeln für eine Rechenart schon hat, kann er keine Regeln mehr formulieren, wohl aber noch Beispiele oder Aufgaben rechnen.

4.1.9 Bisherige Regeln:

Dieser Menüpunkt erlaubt, bei jedem Stand der Arbeit die (richtigen) Regeln abzurufen, die für diese Rechenart schon gefunden wurden. Sie erscheinen einzeln, mit ihrem WENN-Teil. Mit den Pfeiltasten läßt sich in ihnen auf und ab blättern. Die Eingabetaste holt den DANN-Teil dazu.

4.1.10 Für den Lehrer:

Für den Lehrer wird unter der Kopfzeile angezeigt, wieviele Regeln und wieviele der Superregeln für jede der vier Rechenarten schon gefunden wurden (z. B. 5s1 2d2). So kann er mit einem kurzen Blick über die Schulter der Schüler den Arbeitserfolg feststellen, ohne stören zu müssen.

4.2 Diophantische Gleichungen

4.2.1 Vorbemerkungen

Man spricht von diophantischen Gleichungen, wenn von den Lösungen einer oder mehrerer (nicht notwendig) linearer Gleichungen Ganzzahligkeit und meist auch noch positives Vorzeichen verlangt werden und zusätzlich weniger Gleichungen als Variable vorgegeben sind (Diophantes, griechischer Mathematiker, um 250 n.Chr. in Alexandrien).

Beispiele:

Welche natürlichen Zahlen x, y, z ($x \leq y \leq z$) haben die Summe 10 und das Produkt 30?

[(x|y|z) = (2|3|5)]

Welche natürlichen Zahlen x, y ($x \leq y$) haben die Differenz 7?

[(x|y) = (1|8), (2|9), (3|10), ...]

Für welche natürlichen Zahlen x, y ergibt die Summe der vierten Potenzen den Wert 80? [IL = \emptyset]

Diophantische Gleichungen 1. Grades haben die Form $a \cdot x \pm b \cdot y = c$ mit $a, b, c \in \mathbb{N}$. Man kann a und b als teilerfremd voraussetzen. Haben nämlich a und b einen gemeinsamen Teiler t , so muß, wenn die Gleichung überhaupt Lösungen besitzen soll, t auch Teiler von c sein. In diesem Fall dividiert man die Gleichung durch t ($\neq 0$) und stellt so Teilerfremdheit her.

Unter diesen Voraussetzungen besitzt die Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = c$ stets unendlich viele ganzzahlige Lösungen, die man am einfachsten durch ein von Euler gefundenes Verfahren (Absonderung des größten Ganzen, ähnlich dem Euklid-Algorithmus) bestimmt. Man löst die Gleichung nach x oder y (der Variablen mit dem kleinsten Koeffizienten)

auf, zerlegt in einen ganzen Teil und einen gebrochenen Rest, der wieder ganzzahlig sein muß, und eine diophantische Gleichung mit kleineren Koeffizienten liefert, und so weiter.

Beispiel: $4x + 7y = 59$

$$x = \frac{59-7y}{4}$$

$$\rightarrow x = 14 - y + \frac{3-3y}{4}$$

$$r_1 = \frac{3-3y}{4} \text{ ganzzahlig}$$

$$\rightarrow 4r_1 + 3y = 3$$

$$y = \frac{3-4r_1}{3}$$

$$\rightarrow y = 1 - r_1 - \frac{r_1}{3}$$

$$r_2 = -\frac{r_1}{3} \text{ ganzzahlig}$$

$$\rightarrow r_1 = -3r_2$$

$$r_2 = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots$$

r_2	0	-1	1	-2	2	...
x	13	20	6	27	-1	...
y	1	-3	5	-7	9	...

Ist ein Lösungspaar $(x_0|y_0)$ bekannt, so erhält man alle weiteren aus

$$x = x_0 + n \cdot b$$

$$y = y_0 - n \cdot a$$

mit $n = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots$

Setzt man nämlich x und y in $ax + by = c$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned} a \cdot (x_0 + n \cdot b) + b \cdot (y_0 - n \cdot a) \\ = a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = c \end{aligned}$$

Eine weitere Lösungsmethode ist der Kettenbruch-Algorithmus von Lagrange (der aber in den Bereich der Zahlentheorie gehört).

Für mehr als zwei Unbekannte sind mehrere Fälle zu unterscheiden:

a) Es ist nur eine diophantische Gleichung gegeben.

Beispiel:

Es sind die von Null verschiedenen positiven ganzzahligen Lösungen der Gleichung $5x + 3y + 2z = 20$ zu ermitteln.

$$z = 10 - 2x - y - \frac{x+y}{2}$$

$$r = \frac{x+y}{2} \Rightarrow y = 2r - x$$

$x = 1; 2; 3; \dots$
 $r = 1; 2; 3; \dots \quad 2r > x$
 Dann ist $y = 2 \cdot r - x$
 $z = 10 - 2x - y - r = 10 - x - 3r$

r	1	2	2	2
x	1	1	2	3
y	1	3	2	1
z	6	3	2	1

b) Es liegt ein System mehrerer solcher Gleichungen vor.

Beispiel:

$$10x + 8y + 7z = 160$$

$$x + y + z = 22$$

$$10x + 8y + 7(22 - x - y) = 160$$

$$\rightarrow 3x + y = 6 \rightarrow y = 6 - 3x$$

Also: $x = 0; 1; 2; \dots$

$$y = 6 - 3x$$

$$z = 22 - x - y = 22 - x - 6 + 3x$$

$$\rightarrow z = 16 + 2x$$

Drei Lösungen:

x	0	1	2
y	6	3	0
z	16	18	20

Bekannte nicht lineare diophantische Gleichungen sind:

$x^2 + y^2 = z^2$ Pythagoras-Beziehung;
unendlich viele ganzzahlige Lösungen.

$x^3 + y^3 = z^3$ Unmöglichkeit von Lösungen
in der Menge der natürlichen Zahlen (Euler).

$x^p + y^p = z^p$ Für alle ungeraden Primzahlen
 $p > 100$ keine ganzzahligen Lösungen (Kummer).

$x^n + y^n = z^n$ Für kein $n > 2$ ganzzahlige
Lösungen (Fermat).

4.2.2 Behandlung in der S I (Realschule)

Eine tiefgreifende, vollständige Behandlung mit einer Lösungssuche für lineare diophantische Gleichungen nach dem Euler-Algorithmus scheidet für den Bereich der Realschule aus.

Problemstellungen dieser Art sind jedoch vom mathematischen Gehalt her besonders reizvoll und ergiebig. Man begegnet ihnen oft in sog. Denkaufgaben und mathematischen Rätseln wie in Aufgabenstellungen aus dem täglichen Leben, so daß sich die Frage stellt, ob man derartige Probleme nicht doch anhand einiger ausgewählter Beispiele und durch geeignete Aufbereitung in der Realschule behandeln kann.

Da in üblichen Aufgabenstellungen die Anzahl der möglichen Lösungen durch die Forderung, nur natürliche und in den meisten Fällen zusätzlich nur positive Zahlen zuzulassen, eingeschränkt wird, lassen sich derartige Gleichungen bzw. Gleichungssysteme prinzipiell durch Probieren lösen, sofern dieses Probieren systematisch, nach einer bestimmten Strategie erfolgt.

Das Suchen nach möglichen Lösungen durch die Methode des Probierens kann jedoch sehr aufwendig werden. Ist jedoch einmal eine Strategie zum Auffinden der Lösungen erkannt und entwickelt, so erweist sich der Rechner als ideales und für den Bereich der Realschule unverzichtbares Werkzeug, diese probierende Suchen in der Praxis durchzuführen.

Da die Erarbeitung eines geschlossenen Algorithmus, der es erlaubt, diophantische Gleichungen allgemein zu lösen, nicht möglich ist, muß von Fall zu Fall eine spezielle Lösungsstrategie entwickelt und durchgeführt werden.

Sinn und Zweck sowie der Reiz, sich mit derartigen Problemstellungen in der SI auseinanderzusetzen, liegen zum einen in der Methode der Mathematisierung von im Text enthaltenen Informationen und zum anderen im Erfinden von Lösungsmethoden für die jeweils sich ergebenden diophantischen Gleichungen mit dem zur Verfügung stehenden Wissen und den vorhandenen Werkzeugen. Dabei kommt dem Experimentieren unter Einsatz des Rechners eine besondere Bedeutung zu.

Für x und y setzt man zunächst jeweils 1 und probiert für z alle in Frage kommenden Werte durch. Das gleiche Verfahren wird dann für $x = 1$ und $y = 2$, an schließend für alle weiteren möglichen Werte von y wiederholt. Schließlich werden alle bisherigen Versuche für $x = 2$ und dann wiederum für alle weiteren (möglichen) Werte von x wiederholt. Das Verfahren läßt sich durch ein Baumdiagramm (Bild 4.2.1) anschaulich darstellen, wobei der Baum sich in drei Stufen, entsprechend der Anzahl der Variablen, verzweigt und jedes Tripel $(x|y|z)$ sich als ein bestimmter Pfad im Baum verstehen läßt.

Anknüpfungspunkte nach dem Lehrplan:

Lehrplan:

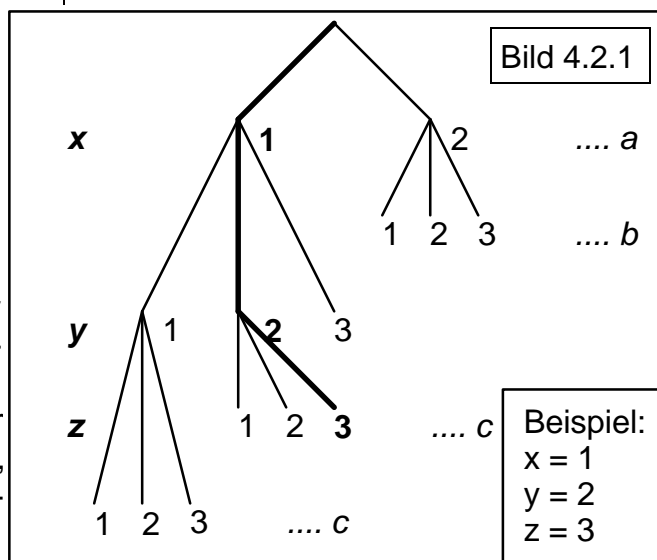
Relationen, Funktionen, Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme

Zeitbedarf:

2 - 3 Unterrichtsstunden, bei Vertiefung durch zusätzliche Beispiele (Kokosnuß-Problem) bis zu 5 Stunden.

Beispiel:

Von drei Artikeln, von denen der erste DM 3.-, der zweite DM 2.- und der dritte DM 1.- kosten, werden insgesamt 31 Stück für zusammen DM 41.- gekauft, wobei von jedem Artikel mindestens ein Stück gekauft wird. Wieviel Stück werden von jedem der drei Artikel erworben?



4.2.2.1 Lösungsmethode durch systematisches Probieren

a) Übertragen der im Text enthaltenen Informationen in die mathematische Symbolschreibweise:

Anzahl von
 Artikel 1: x $x + y + z = 31$
 Artikel 2: y $3x + 2y + z = 41$
 Artikel 3: z mit $x, y, z \in \mathbb{N}$

b) Systematisches Probieren:

c) Erkenntnis:

Das systematische Probieren kann durch drei geschachtelte Wiederholungsstrukturen mit Zähler realisiert werden, wobei die äußere Schleife von 1 bis a , die mittlere von 1 bis b und die innere von 1 bis c geführt wird (a, b, c sind natürliche Zahlen, die sich aus der Aufgabenstellung ergeben). Für jede Kombination der drei Schleifenzähler ist dann zu prüfen, ob die beiden Bedingungen erfüllt sind.

Wenn ja, stellt diese Kombination eine Lösung dar.

d) Bedingungen für die Endwerte der Schleifenzähler:

Man könnte nun für die drei Wiederholungsstrukturen die Endwerte auf sehr große Werte (z. B. 100 (?)) festsetzen. Dem mathematischen Gehalt solcher Aufgaben wird jedoch sicher mehr Rechnung getragen, wenn man anhand der gegebenen Informationen sinnvolle Grenzen für die Schleifenendwerte definiert.

Aus den Bedingungsgleichungen erkennt man so, daß $x \leq 12$ sein muß. Für $x > 12$, z. B. $x = 13$, wäre die zweite Gleichung nicht mehr erfüllt. Entsprechend findet man $y \leq 19$ und $z \leq 29$.

e) Algorithmus (Bild 4.2.2):

4.2.2.2 Lösungsmethode durch Zurückführen auf ein lineares Gleichungssystem

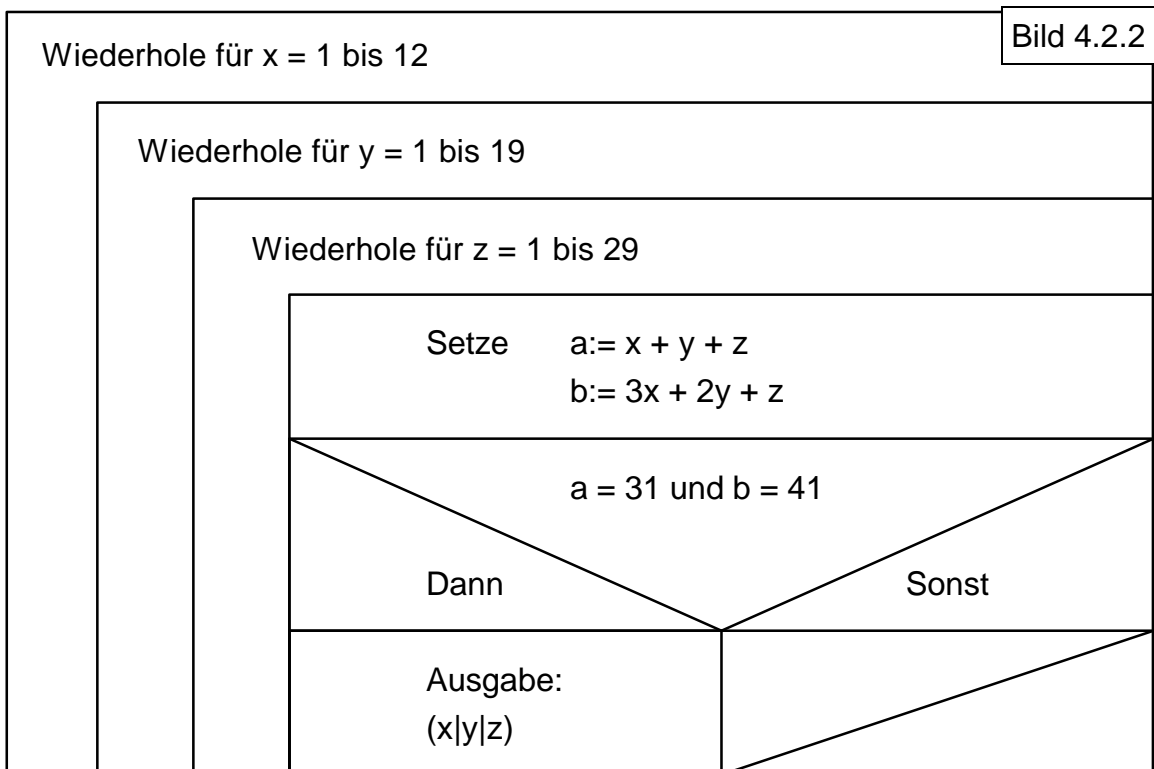
Belegt man in dem gegebenen System aus 2 Gleichungen mit 3 Variablen eine Variable (z. B. z) mit einem bestimmten Wert, so reduziert sich das System auf ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Variablen.

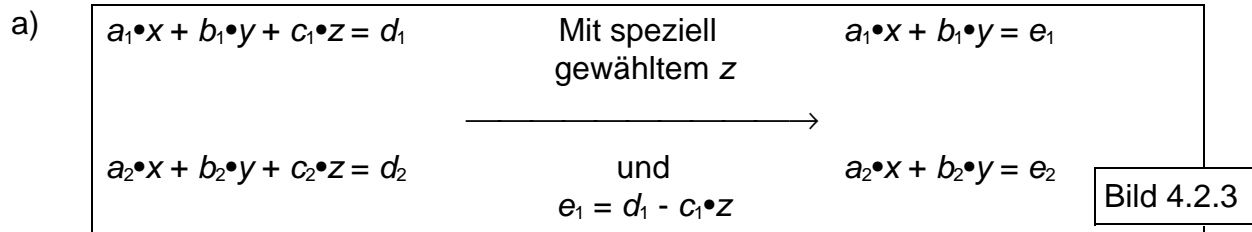
$$\begin{aligned} z = 3: & \quad x + y = 28 \\ z = 22: & \quad x + y = 9 \\ & \quad 3x + 2y = 19 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann dann mit Hilfe eines Algorithmus zur Bestimmung der Lösungen eines linearen Gleichungssystems gelöst werden (s. Kap. 4.3 Lineare Gleichungssysteme).

$$\begin{aligned} \text{Man erhält für } z = 3: & \quad x = -18 \quad y = 46 \\ & \quad z = 22: \quad x = 1 \quad y = 8 \end{aligned}$$

Wegen der Bedingung "alle Lösungen müssen positive ganze Zahlen sein", scheidet die Lösung $(-18|46|3)$ aus. Mit $(1|8|22)$ ist jedoch eine Lösung gefunden.

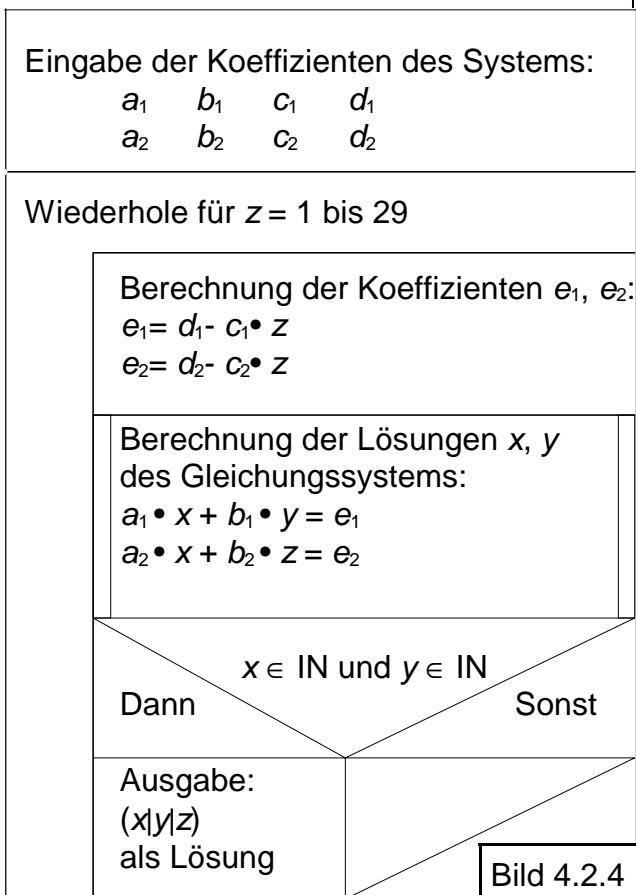




Allgemein ergibt sich damit obige **Lösungsstrategie** (Bild 4.2.3).

Dieses Verfahren wird für alle möglichen Werte von z durchgeführt, wobei das System jeweils gelöst und die Lösung überprüft wird, ob sie nur aus positiven ganzen Zahlen besteht.

b) Dies liefert folgenden **Algorithmus**:



Hinweise:

1. Prüfen, ob $x \in \mathbb{IN}$ und $y \in \mathbb{IN}$. Wenn x ganzzahlig und y ganzzahlig,

dann wenn $x > 0$ und $y > 0$, dann Ausgabe ($x|y|z$).

2. Lösung des Gleichungssystems ist nur dann möglich, wenn $a_1 = 0$ und $u = a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2 = 0$ (s. Kap. 4.3 Lineare Gleichungssysteme). Erweiterung des Algorithmus so, daß diese Bedingungen zu Beginn überprüft werden.
3. Verbesserung des Algorithmus so, daß die gewünschte Anzahl der Wiederholungen für z am Anfang eingegeben werden kann.

c) Graphische Interpretation

1. Eine lineare Gleichung mit zwei Variablen:

Alle ganzzahligen Lösungen von $3x + 2y = 1 \rightarrow$ Lösung:

$$x = 1 + k \cdot 2$$

$y = -1 - k \cdot 3$ ($k \in \mathbb{Z}$). Die auf der Geraden $g: 3x + 2y = 1$ liegenden Gitterpunkte.

2. Zwei lineare Gleichungen mit drei Variablen:

Aufgabe aus 4.2.1.2.1 a)

Eine graphische Veranschaulichung ist in der Realschule/SI nicht möglich.

Die auf der Schnittgeraden der durch beide Gleichungen beschriebenen Ebenen liegenden Gitterpunkte.

4.2.3 Zusätzliche Aufgaben

4.2.3.1 Das Problem mit den Kokosnüssen (aus "Mathematische Rätsel und Probleme", Martin Gardner, Vieweg 1971)

In der Ausgabe der Saturday Evening Post vom 9. Okt. 1926 erschien eine Kurzgeschichte von Ben Ames Williams mit dem Titel Kokosnüsse. Die Geschichte handelt von einem Bauunternehmer, der einen Konkurrenten am Unterschreiben eines wichtigen Vertrages hindern wollte. Ein Angestellter des Unternehmens, der die Leidenschaft des Konkurrenten für Unterhaltungsmathematik kannte, setzte ihm ein Problem vor, welches ihn so in Anspruch nahm, daß er über den Lösungsversuchen völlig vergaß, sein Angebot vor dem Schlußtermin einzureichen. Hier das Problem, so wie es der Angestellte in Williams' Geschichte erzählte:

„Fünf Männer und ein Affe wurden durch einen Schiffbruch auf eine entlegene Insel verschlagen und verbrachten den ersten Tag damit, Kokosnüsse als Nahrung zu sammeln. Dann legten sie sich schlafen. Einer der Männer wachte auf und überlegte sich, daß die Kokosnüsse am nächsten Morgen doch verteilt werden würden, und so beschloß er, sich seinen Teil schon jetzt zu nehmen. Er teilte also die Nüsse in fünf gleiche Haufen. Eine Kokosnuß blieb übrig, und die gab er dem Affen. Sodann versteckte er seinen Anteil und legte die restlichen Nüsse wieder zu einem Haufen zusammen. Nach und nach wachte jeder der Männer auf und tat das gleiche. Jedesmal blieb eine Kokosnuß übrig, die der Affe erhielt.

Am anderen Morgen wurden die noch verbliebenen Kokosnüsse geteilt und es ergaben sich fünf gleiche Teile für jeden der fünf Männer. Natürlich wußte jeder, daß Nüsse fehlten; aber jeder war so schuldig wie die anderen, so daß keiner ein Wort sagte. Wieviele Kokosnüsse waren zu Beginn vorhanden?“

Williams erfand das Kokosnuß-Problem nicht. Er änderte lediglich ein viel älteres Problem ab, um es komplizierter zu gestalten. Die ältere Version ist völlig analog, nur mit dem Unterschied, daß am Morgen bei der letzten Teilung wieder eine Kokosnuß für den Affen übrig blieb; in Williams' Problem geht die letzte Teilung auf.

Beide Versionen haben unendlich viele Lösungen in der Menge der ganzen Zahlen. Ziel ist es, die kleinste positive Lösung zu finden.

Für die Behandlung dieses Problems ist es günstig, sich zunächst mit einem vereinfachten Kokosnuß-Problem zu beschäftigen: Drei Seeleute kommen zu einem Haufen von Kokosnüssen. Der erste Seemann nimmt sich die Hälfte und zusätzlich eine halbe Nuß. Der zweite nimmt sich vom restlichen Haufen die Hälfte und ebenfalls eine halbe Kokosnuß. Der dritte nimmt sich vom noch vorhandenen Rest auch die Hälfte und eine halbe Nuß. Übrig bleibt eine Kokosnuß, die der Affe erhält. Das Problem führt zu einer linearen Gleichung mit einer Variablen:

$$\frac{n}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n}{4} - \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2} + 1 = n$$

n : Anzahl der Kokosnüsse
mit der Lösung $n = 15$.

Als weiterer Zwischenschritt bietet sich an, das Problem zunächst einmal dahingehend zu vereinfachen, daß man es unter sonst gleichen Bedingungen für zwei oder drei Männer durchspielt. Hierbei ist es einfacher und übersichtlicher, die einzelnen Teilungen und die sie beschreibenden Gleichungen zu erarbeiten, so daß es keine großen Schwierigkeiten mehr bereitet, die Verhältnisse auf den Fall mit fünf Männern zu übertragen, nachdem das Prinzip einmal erkannt ist.

Der Weg sei hier für drei Männer kurz dargestellt

Rest	Anteil	Affe
↓	↓	↓
$x =$	$3 \cdot a$	$+ 1$
$2 \cdot a =$	$3 \cdot b$	$+ 1$
$2 \cdot b =$	$3 \cdot c$	$+ 1$
$2 \cdot c =$	$3 \cdot y$	$+ 1$

x : gesuchte, ursprüngliche Anzahl der Nüsse,

y : Anzahl von Kokosnüssen, die jeder der drei Männer bei der letzten Teilung erhält.

In der ersten Gleichung werden a , b , c sukzessive substituiert, was zu der diophantischen Gleichung

$$8 \cdot x - 81 \cdot y = 65$$

mit der kleinsten positiven Lösung $x = 79$, $y = 7$ führt.

Lösungsmöglichkeiten:

- Das Aufsuchen einer Lösung durch (systematisches) Probieren ist zwar prinzipiell möglich, scheitert aber bereits aber an diesem vereinfachten Problem aus praktischen Gründen.
- Graphische Lösung, indem man nach Gitterpunkten im ersten Quadranten (ganzzahlige,

positive Werte für x , y) sucht, die auf dem Graphen der Geraden

$8 \cdot x - 81 \cdot y = 65$ liegen; hat man so eine Lösung gefunden, sollte diese durch Einsetzen in die Gleichung und durch das Durchspielen der Teilungsprozesse verifiziert werden.

- Aufsuchen der Lösung(en) unter Einsatz des Rechners; Erstellen eines Programms (5-Zeiler); dieser Weg ist im Hinblick auf die Behandlung des Problems mit fünf Männern unerlässlich (siehe dazu die Lösung in der Anlage). Interessant ist es auch, einen Zusammenhang zwischen den Lösungen zu erarbeiten, um so zu einer Darstellung der Lösungen in Abhängigkeit von einem Parameter zu gelangen (Parameterdarstellung der durch die Gleichung

$$8 \cdot x - 81 \cdot y = 65$$

beschriebenen Geraden) und die diophantische Gleichung durch Elimination des Parameters wieder zu erhalten.

Nach dieser Hinführung kann man sich der einfacheren älteren Version zuwenden.

Für die ältere Version ergeben sich die folgenden sechs Gleichungen, die die sechs aufeinanderfolgenden Teilungen in Fünftel beschreiben; dabei ist x die gesuchte ursprüngliche Anzahl von Kokosnüssen und y die Anzahl von Nüssen, die jeder der fünf Männer bei der letzten Teilung erhält; die 1 steht jeweils für die dem Affen zugeteilte Kokosnuß.

$$\begin{aligned} x &= 5 \cdot a + 1 \\ 4 \cdot a &= 5 \cdot b + 1 \\ 4 \cdot b &= 5 \cdot c + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \cdot c &= 5 \cdot d + 1 \\ 4 \cdot d &= 5 \cdot e + 1 \\ 4 \cdot e &= 5 \cdot y + 1 \end{aligned}$$

Diese sechs Gleichungen lassen sich auf die folgende diophantische Gleichung mit zwei Variablen bringen:

$$1024 \cdot x - 15625 \cdot y = 11529.$$

Allgemeine Lösung: $k \cdot 5^6 - 4$, ergibt für $k = 1$ die kleinste positive Lösung.

Zusatz: Suche die kleinste Lösung für den Fall, daß die Grundmenge Z ist, also auch „negative“ Kokosnüsse zugelassen werden.

Die (theoretisch mögliche) Suche nach der Lösung durch systematisches Probieren scheidet ebenso wie die graphische Methode aus begrifflichen Gründen aus, so daß nur die Möglichkeit verbleibt, die Lösung(en) mit Hilfe eines Programms zu finden.

Schließlich kann man sich jetzt mit der neuen Williams'schen Version auseinandersetzen. (Allgemeine Lösung: $(1 + 5 \cdot k) \cdot 5^5 - 4$, liefert für $k = 0$ die kleinste positive Lösung)

4.2.3.2 Geld Wechseln

Auf welche Arten lassen sich 10-Pfennig, 50-Pfennig und 1-DM-Stücke zum Gesamtbetrag von 10 DM zusammenstellen, wenn genau 25 Münzen und von jeder Sorte mindestens eine Münze verwendet werden sollen?

4.2.3.3 Briefmarken

Jemand kauft für DM 160.- insgesamt 220 Briefmarken zu 0,70, 0,80 und 1,- DM. Welche Zusammenstellungen sind möglich, wenn von jeder Sorte mindestens eine Marke im Sortiment sein soll?

4.2.3.4 Bücher Bestellen

Jemand gibt bei einem Verlag eine Bestellung von drei Sorten Büchern auf. Diese Bestellung ging verloren. Es ist aber bekannt, daß es sich insgesamt um 100 Bücher mit den Preisen 10 DM, 2 DM und 0,50 DM handelte, und daß der Besteller genau 100 DM dafür überwiesen hatte. Die Bücher für DM 2,- sind Ladenhüter, die der Verlag gerne abstoßen wollte. Die Sendung schien in Ordnung zu sein, als sie abgesandt wurde; trotzdem reklamierte der Besteller, nachdem er die Sendung erhalten hatte. Was hatte er bestellt, was wurde ihm geliefert?

```
REM Diophantische Gleichungen
REM Quick - BASIC

REM Eingabe
CLS
PRINT "Koeffizienten der 1.
Gleichung:"
INPUT "a1 = ", a1
INPUT "b1 = ", b1
INPUT "c1 = ", c1
PRINT
PRINT "Koeffizienten der 2.
Gleichung:"
INPUT "a2 = ", a2
INPUT "b2 = ", b2
INPUT "c2 = ", c2
PRINT
"===== "
PRINT
REM Bedingungen
LET grenzx = 12: LET grenzy = 19:
LET grenzz = 29

REM Berechnung und Ausgabe der
Lösungen
FOR x = 1 TO grenzx
  FOR y = 1 TO grenzy
    FOR z = 1 TO grenzz
      LET a = x + y + z
      LET b = 3 * x + 2 * y + z
      IF a = 31 AND b = 41 THEN
PRINT "Lösung: ("; x; "|"; y;
"|"; z; ")": PRINT
```

Bild 4.2.5

```

Koeffizienten der 1. Gleichung:
a1 = 1
b1 = 1
c1 = 1

Koeffizienten der 2. Gleichung:
a2 = 3
b2 = 2
c2 = 1
=====

Lösung:  ( 1 | 8 | 22 )
Lösung:  ( 2 | 6 | 23 )
Lösung:  ( 3 | 4 | 24 )
Lösung:  ( 4 | 2 | 25 )
    
```

Bild 4.2.6

```

REM Kokosnuß-Problem für 3 Männer

CLS
INPUT "Obergrenze für x und y
eingeben: ", grenz
PRINT : PRINT
PRINT "Lösung(en):"; TAB(20); "x";
TAB(30); "y"
PRINT TAB(20);
"_____ "

FOR x = 1 TO grenz
  FOR y = 1 TO grenz
    IF 8 * x - 81 * y = 65 THEN
      PRINT TAB(19); x;TAB(29); y
    END IF
  NEXT y
NEXT x

END
    
```

Bild 4.2.7

```

Obergrenze für x und y eingeben:
100

Lösung(en): x      y
           _____
            79      7

Obergrenze für x und y eingeben:
1000
    
```

Bild 4.2.8

Lösung(en): x	y
79	7
160	15
241	23
322	31
403	39
484	47
565	55
646	63
727	71
808	79
889	87
970	95

Bild 4.2.9

```

1:  "Kokosnuß - Problem mit 3 Männern"
2:  "===== "
3:  x = 3 a + 1
4:  2 a = 3 b + 1
5:  2 b = 3 c + 1
6:  2 c = 3 y + 1
7:  "===== "
8:  a = (3 b + 1) / 2
9:  b = (3 c + 1) / 2
10: c = (3 y + 1) / 2
11: "===== "
12: x = 3 * ((3 b + 1) / 2) + 1
13: x = 3 * ((3 c + 1) / 2) + 1
14: x = 3 * ((3 y + 1) / 2) + 1
15: "===== "
16: x = (81 y + 65) / 8
17: 8 x = 81 y + 65
    
```

Bild 4.2.10

```

REM System linearer Diophantischer
Gleichungen
REM Quick - BASIC

REM Hauptprogramm
CLS
flag$ = "ja"
GOSUB eingabe
IF flag$ = "nein" THEN END
FOR z = 1 TO 29
    GOSUB koeffizientenberechnung
    GOSUB loesung
    IF INT(x) = x AND INT(y) = y
    THEN IF x > 0 AND y > 0 THEN GOSUB
ausgabe
NEXT z

END

REM Upro Eingabe
eingabe:
PRINT "Koeffizienten der 1.
Gleichung:"
INPUT "a1 = ", a1
INPUT "b1 = ", b1
INPUT "c1 = ", c1
INPUT "d1 = ", d1
PRINT
PRINT "Koeffizienten der 2.
Gleichung:"
INPUT "a2 = ", a2
INPUT "b2 = ", b2
INPUT "c2 = ", c2
INPUT "d2 = ", d2
PRINT
"===== "
PRINT
IF a1 = 0 OR a2 * b1 - a1 * b2 = 0
THEN LET flag$ = "nein": GOSUB
ausgabe2
RETURN

REM Upro Koeffizientenberechnung
koeffizientenberechnung:
LET e1 = d1 - c1 * z
LET e2 = d2 - c2 * z
RETURN

REM Upro Lösung
loesung:
LET u = a2 * b1 - a1 * b2
LET v = a2 * e1 - a1 * e2
LET y = v / u
LET x = (e1 - b1 * y) / a1
RETURN
    
```

Bild 4.2.11

```

REM Upro Ausgabe
ausgabe:
PRINT "Lösung:  ("; x; "|" ; y;
"|"; z; ")"
PRINT
RETURN

REM Upro Ausgabe 2
ausgabe2:
PRINT "Das System ist mit dieser
Methode nicht lösbar,"
PRINT "weil a1 = 0 oder a2 •
b1 - a1 • b2 = 0 ist"
RETURN
    
```

Bild 4.2.12

4.3 Lineare Gleichungssysteme

4.3.1 Ziel dieses Beitrages:

- Es soll ein Algorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme mit Hilfe des Rechners entwickelt werden.
- Es sollen Probleme, die sich beim Einsatz des Rechners ergeben können, aufgezeigt werden.
- Es soll ein Algorithmus zur iterativen Lösung linearer Gleichungssysteme entwickelt werden.

Den Schülern sind der Begriff Lineares Gleichungssystem sowie die verschiedenen Verfahren (Graphische, Gleichsetzungs-, Additions-, Einsetzungsmethode) zur Lösung eines linearen Gleichungssystems bereits bekannt. Es bietet sich an, die oben genannten Ziele im Anschluß an die übliche Behandlung des Themenkomplexes Lineare Gleichungssysteme als Ergänzung bzw. Vertiefung im Unterricht zu behandeln. Dies kann insofern von Bedeutung sein, als damit einerseits über die übliche, konservative Abfolge „Theorie - Aufgabensammlung“ hinausgesehen, andererseits auf Möglichkeiten und Probleme beim Einsatz des Rechners hingewiesen werden kann. Vorgeschlagener Zeitbedarf: 4 bis 5 Unterrichtsstunden.

4.3.2 Lösungsalgorithmus für Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2 \end{cases}$$

mit

$$\begin{aligned} u &= a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2 \\ v &= a_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1 \\ 0 \cdot x + u \cdot y = v \end{cases}$$

Jedes der drei Lösungsverfahren führt auf diese „Dreiecksform“.

Fallunterscheidung: $a_1 \neq 0$:

Bild 4.3.1

$u \neq 0$	a_1	b_1	c_1	
	0	u	v	
Eindeutig lösbar			Geraden mit Schnittpunkt	
IL = $\{(x y)\}$				
$u = 0$	$v \neq 0$	a_1	b_1	c_1
		0	0	v
	Nicht lösbar			Parallele Geraden
IL = $\{ \}$				
$v = 0$	a_1	b_1	c_1	
		0	0	0
	Unendlich viele Lösungen			Zusammenfallende Geraden
IL = $\{(x y) a_1 \cdot x + b_1 = c_1\}$				

Für den Fall der eindeutigen Lösbarkeit ergibt sich die Lösung zu:

$$\begin{aligned} x &= \frac{c_1 - b_1 \cdot y}{a_1} & y &= \frac{v}{u} \\ x &= \frac{b_2 \cdot c_1 - b_1 \cdot c_2}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1} & y &= \frac{a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1} \\ x &= \frac{D_x}{D} & y &= \frac{D_y}{D} \end{aligned}$$

mit den Schreibfiguren:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Algorithmus:

Eingabe der Koeffizienten:	$a_1 \quad b_1 \quad c_1$	$(a_1 \neq 0)$
	$a_2 \quad b_2 \quad c_2$	
Umformen auf Dreiecksform:	Setze $u = a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2$	
	$v = a_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_2$	
Dann	$u \neq 0$	
	Sonst	
Berechnung der eindeutigen Lösung: Setze	$v \neq 0$	
$y = \frac{y}{u}$	Dann	Sonst
$x = \frac{c_1 - b_1 \cdot y}{a_1}$	Ausgabe:	Ausgabe:
Ausgabe: Lösung $\{(x y)\}$	Keine Lösung	Unendlich viele Lösungen

Bild 4.3.2

Folgende Teilaufgaben können in diesem Zusammenhang der Reihe nach im Unterricht behandelt werden:

- Erarbeitung des Algorithmus
- Codierung des Algorithmus
Es ist auch denkbar, den Schülern nach Erarbeitung des Algorithmus das Programm zum Experimentieren an die Hand zu geben.
Ebenso sinnvoll ist es, den Algorithmus in ein Rechenblatt (z. B. Excel) zu übertragen.
- Test für verschiedene lineare Gleichungssysteme, wobei auch Sonderfälle (parallele, identische Geraden) zu berücksichtigen sind.
- Verbesserung des Algorithmus, so daß der Fall $a_1 = 0$ abgefangen wird.

Lin. Gl. System:
$$\begin{cases} 0 \cdot x + 1 \cdot y = 3 \\ 1 \cdot x - 2 \cdot y = -1 \end{cases}$$

Ergebnis: Programmabbruch mit Überlaufmeldung.
Vertauschen der beiden Gleichungen liefert $IL = \{(5|3)\}$.

- Aufgabe:
Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit einem Parameter in Abhängigkeit von diesem Parameter (s. Bilder 4.3.3 und 4.3.4).
- Es sei noch darauf hingewiesen, daß die verschiedenen Lösungsverfahren auch mit einem Werkzeug, das symbolisches Rechnen erlaubt (z. B. derive), durchgeführt werden können (s. Bilder 4.3.5 bis 4.3.7).

Der Wert liegt dabei auf der Tatsache, daß der Schüler nicht zu einem Beobachter undurchsichtiger Arbeitsabläufe zurückgedrängt wird, die auf Knopfdruck Ergebnisse liefern, sondern daß von Schritt zu Schritt die im Hinblick auf den Lösungsweg richtige Vorgehensweise überlegt werden muß, der Rechner also als Werkzeug zur Ausführung der vom Schüler vorgedachten Lösungsschritte eingesetzt wird.

1: "Lineares Gleichungssystem mit Parameter c"	17: " _____ "
2: " _____ "	18: "Für graphische Darstellung:"
3: $-3x + 6y = c$	19: $y = \frac{1}{2}x + \frac{c}{6}$
4: $2x - 2y = \frac{4}{3}c$	20: $y = x - \frac{2}{3}c$
5: " _____ "	21: " _____ "
6: $[-3x + 6y = c, 2x - 2y = \frac{4}{3}c]$	22: "Trägergerade der Schnittpunkte $S\{x(c) y(c)\}$ "
7: $[x = \frac{5c}{3}, y = c]$	23: $x = \frac{5c}{3}$
8: " _____ "	24: $x = \frac{5y}{3}$
9: $c := 6$	25: $[x = \frac{5y}{3}] 3$
10: $[x = 10, y = 6]$	26: $3x = 5y$
11: $c := 12$	27: $\frac{3x = 5y}{5}$
12: $[x = 20, y = 12]$	28: $\frac{3x}{5} = y$
13: $c := 24$	29: $y = \frac{3}{5}x$
14: $[x = 40, y = 24]$	
15: $c := -9$	
16: $[x = -15, y = -9]$	

Bild 4.3.3

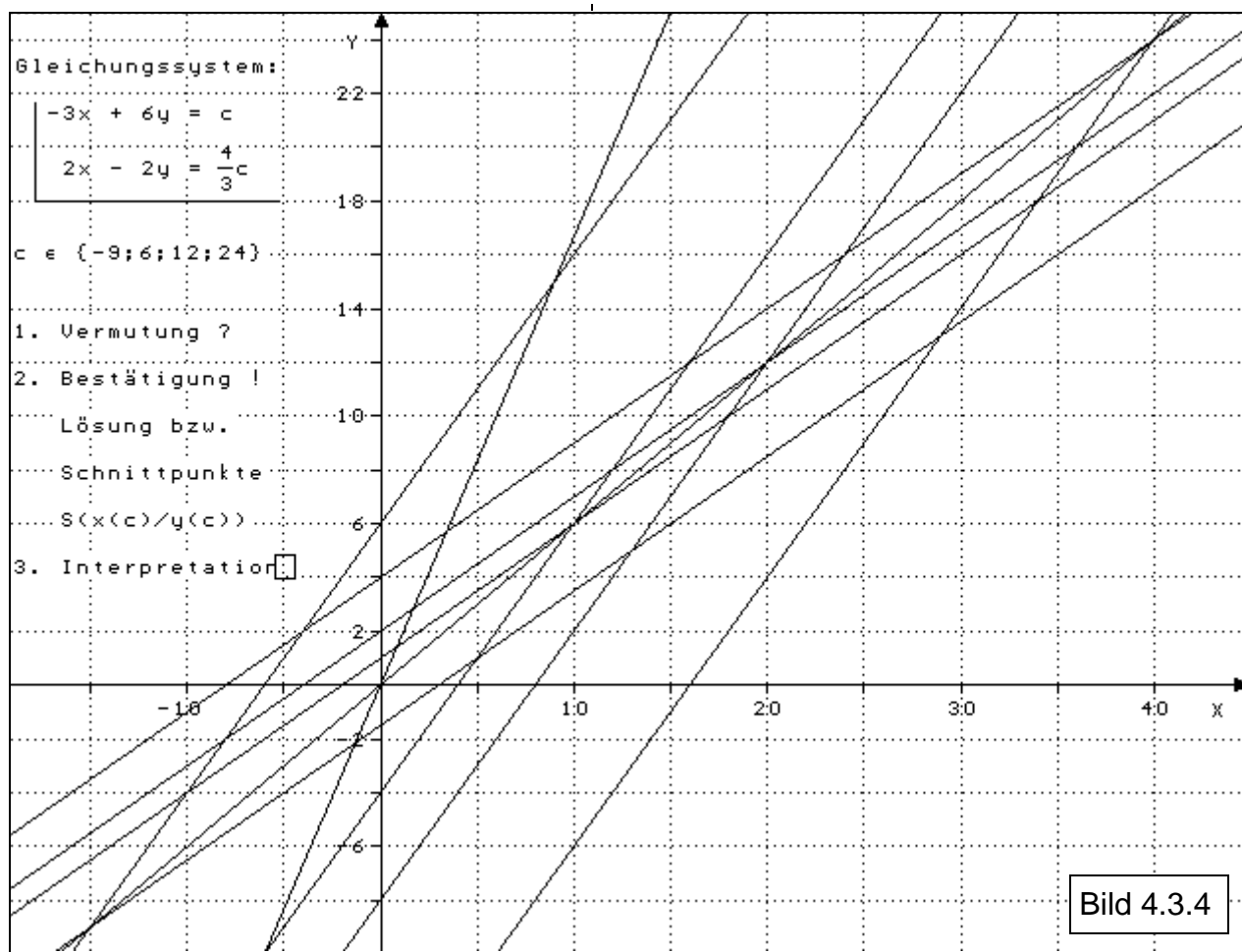


Bild 4.3.4

```

1: "1. Additionsverfahren"
2: "2. Graphisches Verfahren"
3: 3 x + 3 y - 5 = 0
4: 3 x - 5 y - 17 = 0
5: "-----"
      2 x - 5
6: y = - ----
          3
      3 x - 17
7: y = - ----
          5
8: "-----"
9: (2 x + 3 y - 5 = 0) 5
10: (3 x - 5 y - 17 = 0) 3
11: 10 x + 15 y - 25 = 0
12: 9 x - 15 y - 51 = 0
13: "-----"
14: (10 x + 15 y - 25 = 0) + (9 x
    - 15 y - 51 = 0)
15: 19 x - 76 = 0
16: (19 x - 76 = 0) + 76
17: 19 x = 76
    19 x = 76
18: -----
    19
19: x = 4
    3 * 4 - 17
20: y = -----
          5
21: y = -1
22:
"-----"
23: "L = {4 | -1}"
    
```

Bild 4.3.5

4.3.3 Probleme beim Einsatz des Rechners.

In diesem Zusammenhang soll auf die beiden „sensiblen“ Fälle eingegangen werden:

- die Graphen der beiden linearen Gleichungen verlaufen fast parallel,
- der Koeffizient a_1 ist Null oder wenig von Null verschieden.

Dies erscheint insofern von Bedeutung, weil so einerseits eine beim Schüler vorherrschende „Computergläubigkeit“ durch das Versagen eines logisch scheinbar einwandfreien Algorithmus erschüttert werden kann und dies andererseits zum Nachdenken darüber zwingt, welche Gründe dafür

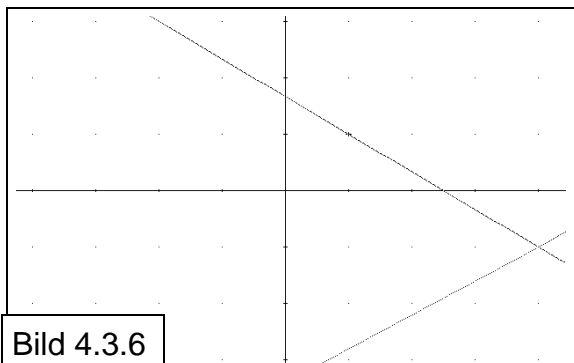


Bild 4.3.6

```

1: "3. Einsetzungsverfahren"
2: 2 x + 3 y - 5 = 0
3: 3 x - 5 y - 17 = 0
4: "-----"
      2 x - 5
5: y = - ----
          3
      2 x - 5
6: 3 x - 5 - ---- - 17 = 0
          3
7: x = 4
      2 * 4 - 5
8: y = - ----
          3
9: y = -1
10: "IL = {4 | -1}"
11: ""
12: "4. Gleichsetzungsverfahren"
13: 2 x + 3 y - 5 = 0
14: 3 x - 5 y - 17 = 0
15: "-----"
      2 x - 5
16: y = - ----
          3
      3 x - 17
17: y = -----
          5
      2 x - 5      3 x - 17
18: - ---- = ----
      3          5
19: x = 4
      3 * 4 - 17
20: y = -----
          5
21: y = -1
22: "IL = {4 | -1}"
    
```

Bild 4.3.7

verantwortlich sind und durch welche Maßnahmen man dennoch zu einer Lösung gelangen kann.

- a) Man bestimmt mit Hilfe des Algorithmus aus 1. oder mit einem Werkzeug (z. B. derive) die Lösungsmengen der linearen Gleichungssysteme

$$a_1 \cdot x - 5 \cdot y = 5$$

$$1 \cdot x - 2 \cdot y = -2$$

mit $a_1 \in \{3; 2.9; 2.8; 2.7; 2.6; 2.5\}$

$$1 \cdot x + 1 \cdot y = 2$$

$$(1 + a) \cdot x + 1 \cdot y = 1$$

mit $a \in \{1; 0.1; 0.01; 0.001; 0.0001; 0.00001; 0.000001\}$

Die Steigungen der durch die beiden Gleichungen des Systems dargestellten Geraden nähern sich immer mehr an, die beiden Geraden werden zunehmend paralleler.

Die vom Rechner gelieferten Ergebnisse (Quick-BASIC / derive) sind nachfolgend angegeben (s. Beilage 3).

Ergebnis:

Kleine Veränderungen in den Koeffizienten von Gleichungssystemen, bei denen die zugehörigen Geraden fast parallel verlaufen, können zu großen Veränderungen in den Lösungen führen.

Weitere Möglichkeit:

Ausgehend vom Gleichungssystem

$$2 \cdot x - 3 \cdot y = 6$$

$$203 \cdot x - 300 \cdot y = -600$$

bei dem der Unterschied der beiden zugehörigen Geraden $\Delta m = 10^{-2}$ beträgt und für welches der Algorithmus aus 1. die richtige Lösung $\{(-400 | -268.6667)\}$ liefert, verändert man die Koeffizienten a_2 , b_2 , c_2 der zweiten Gleichung so, daß der Unterschied der Geradensteigungen der Reihe nach die Werte $m = 10^3, 10^6, 10^7, 10^8$ annimmt.

Ab $\Delta m = 10^{-7}$ ergibt sich mit $IL = \{(0 | -2)\}$ eine falsche Lösung.

- b) Man bestimmt die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$a \cdot x + 1 \cdot y = 1$$

$$1 \cdot x + 1 \cdot y = 2$$

mit $a \in \{10^{-1}; 10^{-4}; 10^{-6}; 10^{-9}; 10^{-12}; 10^{-15}\}$

Der in Quick-BASIC codierte Algorithmus aus 1. liefert die in Spalte 2 angegebenen Lösungsmengen. Vertauscht man die beiden Gleichungen, so ergeben sich die in Spalte 3 aufgeführten Lösungsmengen.

a	IL	IL (vertauscht)
10^{-1}	{1.11111 0.888889}	{1.111111 0.888889}
10^{-4}	{0.9995699 0.9999}	{1.0001 0.9999}
10^{-6}	{1.013279 0.999999}	{1.000001 0.999999}
10^{-9}	{0 1}	{1 1}
10^{-12}	{0 1}	{1 1}
10^{-15}	{0 1}	{1 1}

Ergebnis:

Der Lösungsalgorithmus versagt nicht nur für $a_1 = 0$; er kann auch dann fehlerhafte Ergebnisse liefern, wenn der Koeffizient a_1 sehr wenig von Null verschieden ist. Dies kann u. U. durch Vertauschen der beiden Gleichungen des Systems vermieden werden.

Nachstehend seien noch die Ergebnisse angegeben, die man mit dem Programm derive erhält und die zeigen, daß hier offensichtlich ein Algorithmus verwendet wird, der gegen diese Art der Fehler offensichtlich immun ist (Bilder 4.3.8 bis 4.3.11).

1: $a x + 1 y = 1$
 2: $1 x + 1 y = 2$
 3: " _____ "
 4: $[a x + 1 y = 1, 1 x + 1 y = 2]$
 5: $[x = -\frac{1}{a-1}, y = \frac{1}{a-1} + 2]$
 6: " _____ "
 7: $a := 0.1$
 8: $[x = 1.11111111111, y = 0.888888888888]$
 9: $a := 0.0001$
 10: $[x = 1.00010001000, y = 0.999899989998]$
 11: $a := 0.000001$
 12: $[x = 1.00000100000, y = 0.999998999998]$
 13: $a := 0.000000001$
 14: $[x = 1.00000000100, y = 0.999999998999]$
 15: $a := 0.000000000001$
 16: $[x = 1.00000000000, y = 0.999999999998]$
 17: $a := 0.000000000000001$
 18: $[x = 1.00000000000, y = 0.999999999999]$

Bild 4.3.8

1: $1 x + 1 y = 2$
 2: $a x + 1 y = 1$
 3: " _____ "
 4: $[1 x + 1 y = 2, a x + 1 y = 1]$
 5: $[x = -\frac{1}{a-1}, y = \frac{1}{a-1} + 2]$
 6: " _____ "
 7: $a := 0.1$
 8: $[x = 1.11111111111, y = 0.888888888888]$
 9: $a := 0.0001$
 10: $[x = 1.00010001000, y = 0.999899989998]$
 11: $a := 0.000001$
 12: $[x = 1.00000100000, y = 0.999998999998]$
 13: $a := 0.000000001$
 14: $[x = 1.00000000100, y = 0.999999998999]$
 15: $a := 0.000000000001$
 16: $[x = 1.00000000000, y = 0.999999999998]$
 17: $a := 0.000000000000001$
 18: $[x = 1.00000000000, y = 0.999999999999]$

Bild 4.3.9

1: $a x - 5 y = 5$
 2: $1 x - 2 y = -2$
 3: " _____ "
 4: $[a x - 5 y = 5, 1 x - 2 y = -2]$
 5: " _____ "
 6: $a := 3$
 7: $[x = 20, y = 11]$
 8: $a := 2.9$
 9: $[x = 25, y = 13.5]$
 10: $a := 2.8$
 11: $[x = 33.3333333333, y = 17.6666666666]$
 12: $a := 2.7$
 13: $[x = 50, y = 26]$
 14: $a := 2.6$
 15: $[x = 100, y = 51]$
 16: $a := 2.51$
 17: $[x = 1000, y = 501]$
 18: $a := 2.5$
 19: "Keine Lösung gefunden !!!"

Bild 4.3.10

1: $1 x + 1 y = 2$
 2: $(1 + a) x + 1 y = 1$
 3: " _____ "
 4: $[1 x + 1 y = 2, (1 + a) x + 1 y = 1]$
 5: $[x = -\frac{1}{a-1}, y = \frac{1}{a-1} + 2]$
 6: " _____ "
 7: $a := 1$
 8: $[x = -1, y = 3]$
 9: $a := 0.1$
 10: $[x = -10, y = 12]$
 11: $a := 0.01$
 12: $[x = -100, y = 102]$
 13: $a := 0.001$
 14: $[x = -1000, y = 1002]$
 15: $a := 0.0001$
 16: $[x = -10000, y = 10002]$
 17: $a := 0.00001$
 18: $[x = -100000, y = 100002]$
 19: $a := 0.000001$
 20: $[x = -1000000, y = 1000002]$

Bild 4.3.11

4.3.4 Ein Iterationsalgorithmus zur Lösung Linearer Gleichungssysteme

Aufgabe:

Bei einem Trainingslauf gibt Fritze Flink, der die 1000 m-Strecke in 3:00 min. läuft, seinem Partner Egon Schmeckerl, der dafür 3:20 min. benötigt, 40 Meter Vorsprung. Wann und wo holt Flink seinen Partner ein (Annahme: Beide laufen mit konstanter Geschwindigkeit)?

Lösungsstrategie:

Geschwindigkeit

$$\text{Flink: } \frac{1000\text{m}}{180\text{s}} = \frac{50}{9} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Schneckerl: } \frac{1000\text{m}}{200\text{s}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Wir bestimmen die Zeiten x_1, x_2, x_3, \dots , nach denen Flink den jeweiligen Vorsprung von Schneckerl aufgeholt hat. Ist x_1 die Zeit, die Flink benötigt, um die Vorgabe $y_0 = 40$ m aufzuholen, so gilt: $40\text{m} = \frac{50}{9} \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot x_1$, also $x_1 = 7,2$ s.

Während dieser Zeit hat jedoch Schneckerl den Weg $y_1 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot x_1 + 40$ m zurückgelegt:
 $y_1 = 76$ m.

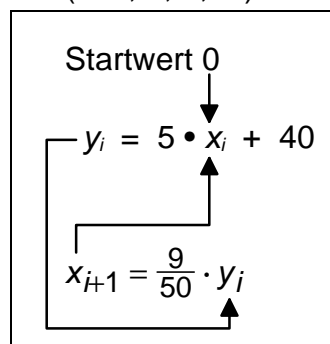
Diese Strecke wird dann wiederum von Flink in der Zeit $x_2 = \frac{9}{50} \frac{\text{s}}{\text{m}} \cdot y_1 = 13,68$ s zurückgelegt. Und so geht es weiter.

Allgemein erhält man

das
Gleichungssystem

$$\begin{cases} y = 5 \cdot x + 40 \\ x = \frac{9}{50} \cdot y \end{cases}$$

bzw. die folgende **Iteration** ($i=0; 1; 2; \dots$)



Die Zeiten x_i nähern sich einer Zeit x^* und die zugehörigen Wege y_i einer Strecke y^* an, die das „Wann und Wo“ des Einholvorgangs bedeuten.

Durch diese iterative Methode wird der Verfolgungsprozeß bis zum Einholzeitpunkt bzw. bis zum Einholort besonders anschaulich und lehrreich (vergl. Zenon-Problem) dargestellt. Eine graphische Veranschaulichung dieses Vorgangs unterstützt die Einsicht in diesen iterativen Prozeß zusätzlich.

4.3.5 Mögliche Behandlung im Unterricht:

1. Ausgehend von obiger Aufgabenstellung (oder einer ähnlichen) wird das Problem „mathematisiert“, d. h. der Iterationsalgorithmus erarbeitet.
2. Zur Lösung des Problems bieten sich mehrere Wege an:
 - die Schüler erstellen ein entsprechendes Programm
 - das Programm wird den Schülern an die Hand gegeben (Bilder 4.3.12 und 4.3.13),

```

Quick-BASIC - Programm:

Koeffizienten      der      1.
Gleichung:
a1 = 50
b1 = -9
c1 = 0
Koeffizienten      der      2.
Gleichung:
a2 = 5
b2 = -1
  
```

Bild 4.3.12

- es wird ein Werkzeug eingesetzt, das es gestattet, iterative Prozesse zu bearbeiten (z. B. Vivitab oder derive).

```

*****
x          Y
*****
0          40
7.2       76
13.68     108.4
19.512    137.56
24.7608   163.804
29.48472  187.4236
33.73625  208.6813
37.56263  227.8131
41.00636  245.0318
44.10573  260.5286
46.89516  274.4758
.         .
.         .
.         .
.         .
71.99996  399.9998
71.99996  399.9998
    
```

Bild 4.3.13

Parallel dazu sollte auf jeden Fall eine graphische Darstellung dieses Iterationsprozesses erfolgen (s. Bilder 4.3.14 und 4.3.15, mit Vivitab).

```

n      x(n)      y(n)
235 (c1-b1*x(n) c2-a2*y(n))
1      7.2       40
2      13.68    76
3      19.512   108.4
4      24.7608  163.804
5      29.48472 187.4236
6      33.73625 208.68124
7      37.56263 227.81316
8      41.00636 245.03184
9      44.10573 260.52862
10     46.89516 274.47576
11     49.48472 287.42364
12     51.66507 298.32366
13     53.69856 308.49283
14     55.52870 317.64354
15     57.19996 325.99998
a1 = 50; b1 = -9; c1 = 0; a2 = 5; b2 = -1; c2 = -40;
0.000000000E+00 C:\MATH\MATHELAB\ MATLAB
Reelle Zahl eingeben
ESC ? Rechner Niedh Ls Speich Const Modell Graf Ctrl + q = Quitt
    
```

Bild 4.3.14

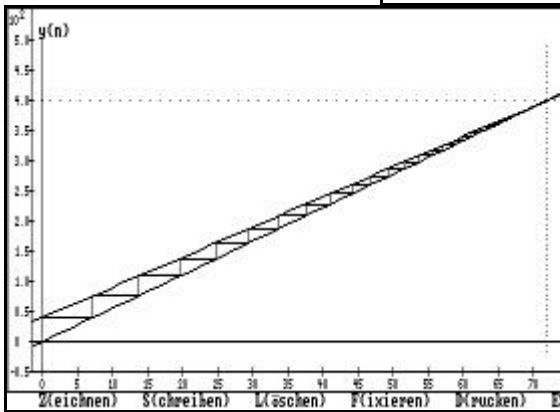


Bild 4.3.15

3. Verallgemeinerung des Verfahrens zur iterativen Lösung linearer Gleichungssysteme:

Eingabe: Koeffizienten für die
1. Gleichung $\rightarrow a_1, b_1, c_1$
2. Gleichung $\rightarrow a_2, b_2, c_2$
Setze Genauigkeit ϵ fest
Setze Startwert $x_{neu} = 0$
Wiederhole
Setze $x_{alt} = x_{neu}$
Setze $y_{neu} = (c_1 - a_1 \cdot x_{alt}) : b_1$
Ausgabe: x_{alt}, y_{neu}
Setze $x_{neu} = (c_2 - b_2 \cdot y_{neu}) : a_2$
Bis $ x_{neu} - x_{alt} < \epsilon$
Ausgabe: Lösung x_{neu}, y_{neu}

Auch hier bieten sich wieder die drei oben genannten Möglichkeiten für eine Umsetzung im Unterricht an.

Zusätzlich kann auf die folgenden Fragen bzw. Probleme, die sich im Unterricht sehr wahrscheinlich zwangsläufig ergeben, eingegangen werden:

- Liefert dieser Iterationsalgorithmus zu allen linearen Gleichungssystemen eine (richtige) Lösung?
- Woran liegt es, daß der Algorithmus versagt? Welche Möglichkeit gibt es, um dennoch eine Lösung zu erhalten?

Da der mathematische Hintergrund hierzu Schülern der SI nicht zugänglich ist, erscheint eine graphische Veranschaulichung des Iterationsprozesses unumgänglich, weil dadurch die Verhältnisse einsichtig oder zumindest plausibel gemacht werden können.

Diese Probleme können z. B. an den beiden Gleichungssystemen

$$x - 2 \cdot y = -2$$

$$x + y = 7$$

$$IL = \{(4|3)\}$$

$$2 \cdot x + 3 \cdot y = 5$$

$$3 \cdot x - 5 \cdot y = 17$$

$$IL = \{(4|-1)\}$$

untersucht werden (s. Bild 4.3.16 - 4.3.19, mit Vivitab).

Der Algorithmus liefert für das 1. System die richtige Lösung, während er beim 2. System divergiert. Vertauscht man die beiden Gleichungen des 2. Systems, so konvergiert der Algorithmus gegen die (richtige) Lösung.

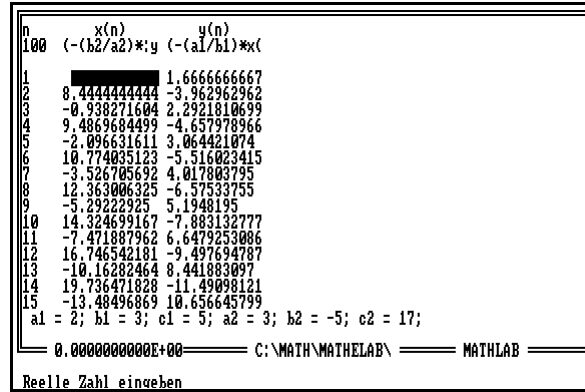


Bild 4.3.18

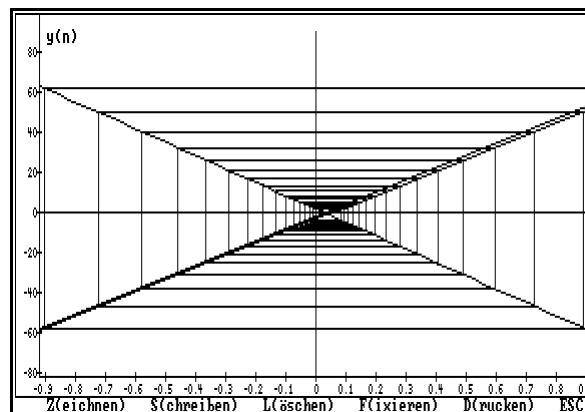


Bild 4.3.19

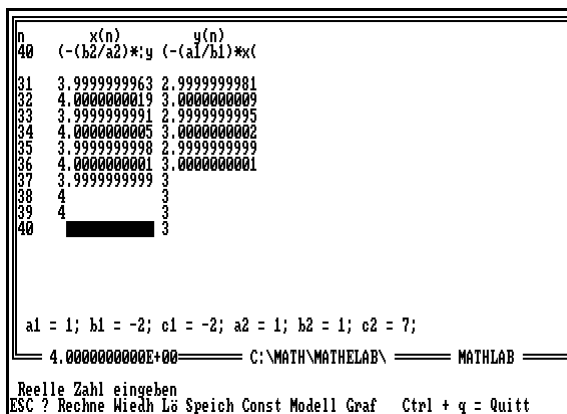


Bild 4.3.16

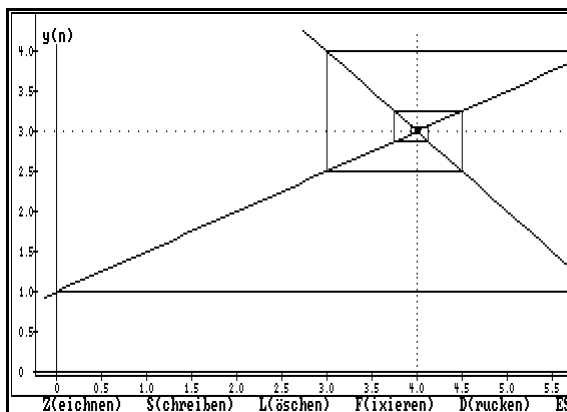


Bild 4.3.17

4.4 Lineare Gleichungssysteme - Graphische Lösung

4.4.1 Thema:

Lineare Gleichungssystem mit zwei Variablen (8./9. Jahrgangsstufe)

Bei der Behandlung linearer Gleichungssysteme wird in der 8. Jahrgangsstufe des Gymnasiums bzw. 9. Jahrgangsstufe der Realschule schwerpunktmäßig der Fall von 2 Gleichungen mit zwei Variablen behandelt. Eine lineare Gleichung mit einer Variablen lässt sich als lineare Funktion $y = mx + t$ interpretieren und graphisch als Gerade in einem x - y -Koordinatensystem darstellen. Die Lösung des linearen Gleichungssystem erhält man dann durch Schneiden der beiden Graphen für die linearen Gleichungen. Diese Zusammenhänge lassen sich gerade wegen des Zusammenspiels von rechnerischen und graphischen Methoden gut am Computer erarbeiten.

Jedes gute Zeichenprogramm für Funktionen (z. B. das Programm PLOT, erhältlich an der Zentralstelle für Computer im Unterricht, Augsburg) ermöglicht das schnelle Zeichnen einer Geraden zur gegebenen Funktionsgleichung

$$y = mx + t.$$

Noch schöner wäre ein Zeichenprogramm für Relationen. Man könnte dann die linearen Gleichungen in beliebiger Form (z. B. $x + y = 5$) eingeben um den Graphen zu erhalten.

Sehr hilfreich ist auch ein Koordinatengitter um „glatte“ Lösungen zu erkennen oder ein Fadenkreuzcursor mit Positionsangabe.

Für rechnerische und zeichnerische Behandlung von Gleichungssystemen kann man auch das Programm derive verwenden. Es löst Relationen nach einer Variablen auf, hat sehr gute Zeichenfunktionen und berechnet direkt die Lösung eines linearen Gleichungssystems.

Ein Tabellenkalkulationsprogramm mit Graphik ist für diese Problemstellung ganz besonders geeignet. Es erlaubt insbesondere den Zusammenhang zwischen Zeit/Ort-Werten und Punkten im Zeit/Ort-Diagramm zu verdeutlichen. In Frage kommen alle Programme, die eine naturwissenschaftliche graphische Darstellung haben, also nicht nur Business-Graphik.

Der übliche Anwendungsbereich für lineare Gleichungssysteme ist der Bereich der Bewegungsaufgaben mit den Fragen des Treffens bzw. des Einholens der Bewegungsteilnehmer. Auf der x -Achse des Koordinatensystems wird dann üblicherweise die Uhrzeit aufgetragen, auf der y -Achse der Ort (Zeit/Ort-Diagramm).

Ein erster wichtiger Schritt besteht nun darin, mit den Schülern das Verständnis für die Graphen in einem Zeit/Ort-Diagramm zu erarbeiten.

4.4.2 Aufgabe 1

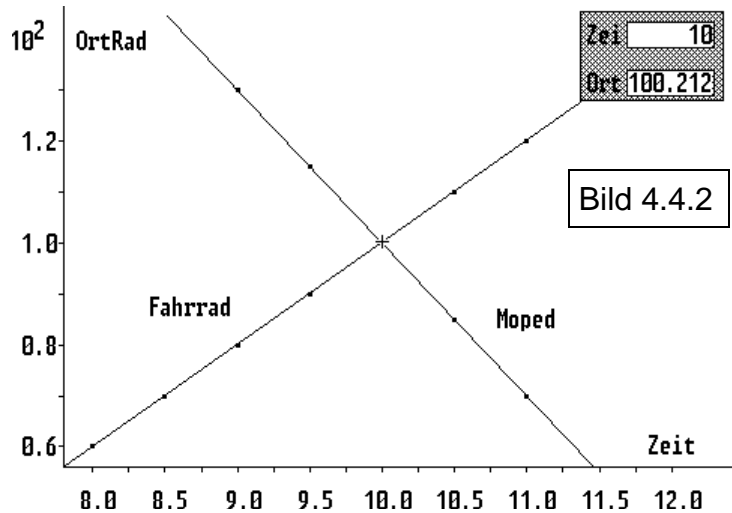
Um 8 Uhr befindet sich ein Radfahrer, der mit gleichmäßiger Geschwindigkeit fährt, am Ort A (Kilometerstein 60), um 11.30 Uhr am Ort B (Kilometerstein 130). Rechne nach jeder halben Stunde den zurückgelegten Weg aus und zeichne den Zeit-Ort-Punkt in ein Zeit/Ort-Diagramm ein. Verbinde alle gezeichneten Punkte durch eine Gerade. Was bedeutet diese Gerade? Wann hat er die Hälfte der Strecke zurückgelegt? Wieviele km hat er nach 45 Minuten

geschafft? Was ändert sich an der Geraden, wenn er schneller fährt, langsamer fährt, stehen bleibt?

Mit dem Programm Vivitab können Zeit/Ort-Wertetabellen eingegeben und graphisch als Punkte oder Linien dargestellt werden (Bild 4.4.1). Die Schüler werden anfangs die geforderten Werte selbst berechnen und den Computer nur zum Zeichnen benützen. Der Fadenkreuzcursor ermöglicht dann die Beantwortung der gestellten Fragen. Der Einfluß der Geschwindigkeit auf den Verlauf des Graphen kann durch die Schüler selbst experimentell gefunden werden.

4.4.3 Aufgabe 2

Ein Mopedfahrer fährt auf der gleichen Strecke wie der Radfahrer von Aufgabe 1 von B (130 km) nach A (60 km). Er startet um 9 Uhr und fährt in der Stunde 30 km. Zeichne für jede halbe Stunde seinen Ort in das Zeit/Ort-Diagramm (Bild 4.4.2). Verbinde alle Punkte durch eine Gerade. Wann kommt der Mopedfahrer am Ort A an? Jemand sagt, als er die beiden Geraden von Radfahrer und



Mopedfahrer im Diagramm sieht: „Der Radfahrer fährt bergauf, der Mopedfahrer bergab“. Stimmt das?

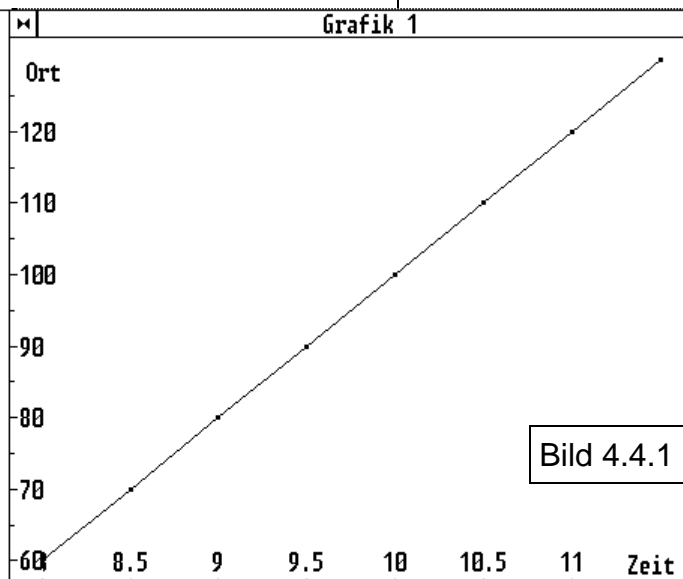
Woran erkennt man im Diagramm, daß der Mopedfahrer schneller fährt als der Radfahrer?

Was bedeutet der Schnittpunkt der beiden Geraden?

Wie kann man in der Graphik feststellen, wie weit die beiden Fahrer um 9.30 Uhr voneinander entfernt sind?

Nach diesen beiden einführenden Aufgaben kann man den Schülern einfache Zeit/Ort-Diagramme vorlegen und eine Beschreibung der dort dargestellten

S :	Bogenmaß	
U1:		
U2:		
	Wert: 120	
n	Zeit	Ort
15	[h]	[km]
1	8	60
2	8.5	70
3	9	80
4	9.5	90
5	10	100
6	10.5	110
7	11	120
8	11.5	130
9		
10		
11		
12		
13		
14		

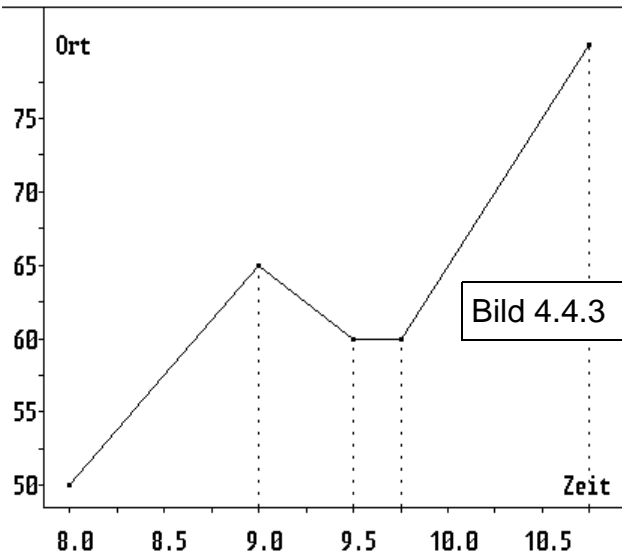


Bewegung verlangen. Dazu gibt es

a) Verbale Beschreibung durch einen Text;

b) Numerische Beschreibung durch eine Wertetabelle.

Die Beschreibung durch Wertetabelle hat den Vorzug, daß eine sofortige Kontrolle durch den



Zeit [h]	Ort [km]
8	50
9	65
9.5	60
9.75	60
10.75	80

Schüler dadurch möglich ist, daß er die Werte eingibt und das Programm den Graphen zeichnet. Die Diagramme können auch von Schülern selbst erstellt, von anderen bearbeitet, und von ersteren korrigiert werden.

Bild 4.4.3 zeigt ein Zeit/Ort-Diagramm, Bild 4.4.4 die numerische und Bild 4.4.5 eine verbale Beschreibung.

Ein Radfahrer startet um 8.00 Uhr beim Kilometerstein 50, fährt 1 Stunde und legt dabei 15 km je Stunde zurück. Da bemerkt er, daß er etwas verloren hat und fährt mit 10 km/h langsam zurück. Nach einer halben Stunde findet er, was er gesucht hat und legt eine kleine Pause von 15 min ein. Dann fährt er mit 20 km/h schnell an sein 30 km entferntes Ziel, das er um 10.45 Uhr erreicht.

Bild 4.4.5

Der nächste Schritt besteht darin, die funktionale Beschreibung der gleichförmigen Bewegung zu erarbeiten. Auch dazu kann die Tabelle eine wertvolle Hilfe sein. In Aufgabe 1 zeigt der Graph,

daß eine direkte Proportionalität vorliegt, wenn man (statt des Ortes) den zurückgelegten Weg s und (statt der Uhrzeit) die verfllossene Zeit t betrachtet. Diesen Zusammenhang erhält man auch rechnerisch, wenn man in der Tabelle eine Spalte t für die verfllossene Zeit und eine Spalte s für den zurückgelegten Weg einführt.

$$t = \text{Uhrzeit} - \text{Anfangszeit};$$

$$s = \text{Ort} - \text{Anfangsort}.$$

In einer Spalte v (Geschwindigkeit) wird dann s/t berechnet. Da s/t konstant ist liegt eine direkte Proportionalität vor und es gilt $s/t = v$. Daraus folgt die wichtige Formel

$$s = v * t.$$

Für den Ort gilt:

$$\text{Ort} = \text{Anfangsort} + s$$

$$\text{Ort} = \text{Anfangsort} + v * t$$

Bezeichnet man den Ort mit y und den Anfangsort mit y_0 , so erhält man

$$y = y_0 + v * t. \quad (1)$$

An dieser Stelle bieten sich wieder verschiedene Möglichkeiten für die Eigentätigkeit der Schüler an: mit Hilfe der Formel (1) bei gegebenem Anfangsort und Geschwindigkeit eine Zeit/Ort-Tabelle erstellen, wobei der Zeitschritt frei gewählt werden kann (z. B. alle 10 Minuten); dann die Tabelle graphisch darstellen!

- Aus einem gegebenen „steigenden“ Graphen die Formel (1) erstellen und tabellarisch sowie graphisch nachprüfen.
- Für Bewegung in umgekehrter Richtung bzw. „fallende“ Graphen die Formel (1) entwickeln.

Nachdem die Schüler mit Tabellen, Funktionen und Graphen für Bewegungsabläufe vertraut sind, können jetzt die verschiedensten Begegnungs- und

Einholaufgaben behandelt werden. Dabei sollten die graphischen Methoden im Vordergrund stehen. Das rechnerische Lösen des Gleichungssystems bestätigt und präzisiert dann das Ergebnis.

Bezeichner:		Ort
n	Zeit	Ort
15	[h]	[km]
1	6	0
2	7	6
3	8	12
4	9	18
5	10	24
6	11	30
7	12	36
8	13	42
9	14	48
10		
11	10	0
12	11	18
13	12	36
14	13	54

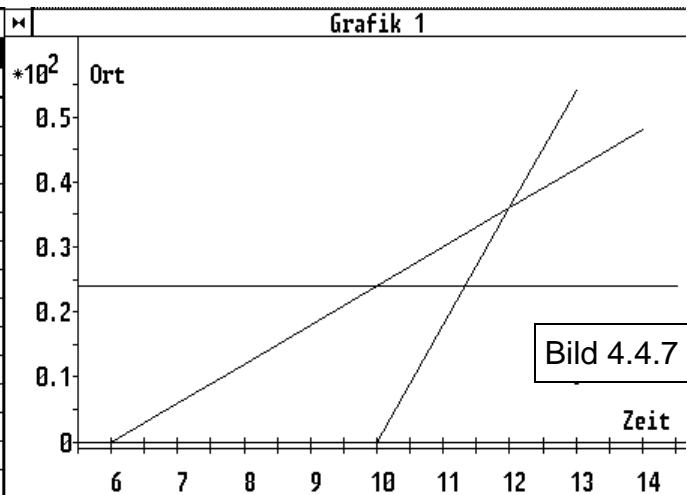


Bild 4.4.7

4.4.4 Aufgabe 3

Drei Orte A, B und C liegen an einer Bundesstraße bei Kilometer 100, 180 und 275. Ein PKW fährt um 7.30 Uhr mit 90 km/h von A nach C. Ein LKW fährt um 7 Uhr von C nach A, wo er um 10.30 Uhr eintrifft.

Wann und wo treffen sich beide? Zeichnen und rechnen! Wie weit sind beide voneinander entfernt, wenn der PKW durch den Ort B fährt?

Wie lange müßte der PKW im Ort B auf den LKW warten?

Mit welcher Geschwindigkeit muß der PKW fahren, daß er den LKW genau im Ort B trifft?

Wann muß der PKW starten, daß er bei einer Geschwindigkeit von 90 km/h den LKW genau im Ort B trifft?

Alle Fragen sind anhand der Zeichnung zu beantworten (Bild 4.4.6). Arbeit in Kleingruppen ist zu empfehlen. Für Gymnasiasten sollte auch eine rechnerische Bestätigung der Ergebnisse verlangt werden.

Datei Rechnen Tabelle Ordnen Grafik Zeichnen Option Hilfe VIVITABC

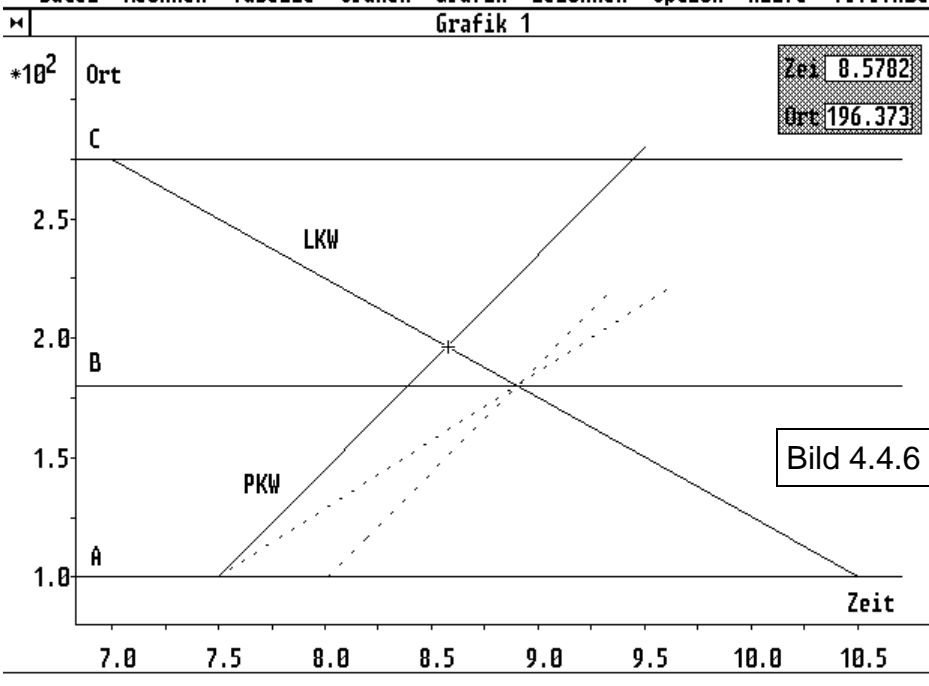


Bild 4.4.6

4.4.5 Aufgabe 4

Ein Wanderer geht um 6 Uhr morgens im Ort A los, um den 48 km entfernten Ort B zu erreichen. Er wandert mit durchschnittlich 6 km/h. Um 10 Uhr folgt ihm ein Radfahrer mit 18 km/h. Wie lange müßte der Wanderer auf halbem Wege rasten, damit der Radfahrer ihn dort einholt (Bild 4.4.7)?

Solche und ähnliche Aufgaben lassen sich in Fülle finden. Der Lehrer sollte die Schüler dazu anregen, selbst Aufgaben zu entwickeln. Die Graphik hilft dabei, nur solche Aufgaben zu formulieren, die auch lösbar sind (Schnittpunkt innerhalb des betrachteten Bereichs).

Eine Steigerung in den Anforderungen ergibt sich durch

- a) die Einführung eines weiteren Partners in den Bewegungsaufgaben,
- b) die Forderung nach „glatten“ Ergebnissen beim Rechnen (Schnittpunkt auf Gitterpunkt).

Die konstruierten Aufgaben können dann anderen Schülern zur Lösung vorgelegt werden. Ein kleiner Wettbewerb ist denkbar.

4.5 Lösen von Mischungsaufgaben mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms.

4.5.1 Ziel

Es soll gezeigt werden, daß man Mischungsaufgaben unkonventionell mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms durch Iteration lösen kann.

Problem: Zwei verschiedene Mengen von Flüssigkeiten werden gemischt bzw. Metalle werden legiert.

Vorwissen: Lösungsschema von Mischungsaufgaben, Iteration.

Literatur: Böhm, Ehrhardt, Hohle: Schüler arbeiten mit einem Tabellenkalkulationsprogramm, Metzler+Teubner.

4.5.2 Aufgabe

Bei einer Firma werden 32 kg einer Ware, von der das kg 12,20 DM kostet, mit einer zweiten Ware gemischt, von der ein kg 8,60 DM kostet. Der Verkaufspreis von einem kg der Mischung soll 10,20 DM betragen. Wieviel kg der 2. Sorte benötigt man für diese Mischung?

Eine mögliche Tabelle in Excel kann so aussehen:

	1	2	3
1	1. Sorte	1. Sorte	Mischung
2	32 kg	x kg	c kg
3			
4	12,2 DM/kg	8,6 DM/kg	10,2 DM/kg
5			
6	-----	-----	-----
7	390,4 DM	DM	y DM

Im konventionellen Mathematikunterricht würde man die Aufgabe üblicherweise so lösen:

Wenn man die Menge der 2. Sorte mit x bezeichnet, so beträgt der Gesamtpreis der 2. Sorte $x \cdot 8,60$ DM. Die Gesamtmenge c der Mischung ist die Summe der beiden Teilmengen, nämlich $(32 + x)$ kg. Zur Berechnung des Gesamtpreises d der Mischung kann man nun zwei Gleichungen aufstellen:

$$I \quad y = 32 \cdot 12,20 + x \cdot 8,60$$

$$\Rightarrow y = 8,6 \cdot x + 390,4$$

$$II \quad y = (32 + x) \cdot 10,20$$

$$\Rightarrow y = 10,2 \cdot x + 326,4$$

Durch Gleichsetzen von Gleichung I mit Gleichung II erhält man:

$$32 \cdot 12,2 + x \cdot 8,60 = (32 + x) \cdot 10,20$$

oder nach x aufgelöst:

$$x = \frac{32 \cdot (12,20 - 10,20)}{(10,20 - 8,60)} \Rightarrow x = 40$$

Jetzt könnte man die entsprechenden Daten für die Mengen und Kilogrammpreise in ein Rechenblatt eingeben und damit dann Aufgaben dieses Typs lösen. Dieser Lösungsweg kann aber den Einsatz eines Computers nicht rechtfertigen, denn man muß ja den Lösungsweg einmal selbst durchgerechnet haben. In vielen Tabellenkalkulationsprogrammen kann man iterieren; dies ist ein interessanter, vielen Schülern unbekannter, aber doch leicht eingänglicher Lösungsweg.

Nimmt man zunächst hilfsweise an, daß die gesuchte Menge der 2. Sorte gegeben sei, so kann man das Rechenblatt mit folgenden Formeln erstellen:

	1	2	3
1	1. Sorte	1. Sorte	Mischung
2	32 kg	ZS(+1) ZS(-1)	Z(+5)S/ Z(+2)S
3			
4	12,2 DM/kg	8,6 DM/kg	10,2 DM/kg

5			
6	-----	-----	-----
7	Z(-5)S* Z(-3)S	Z(-5)S* Z(-3)S	ZS(-2)+ ZS(-1)

Danach erhält man je nach der Reihenfolge der Formeleingabe z. B. folgendes Rechenblatt:

	1	2	3
1	1. Sorte	1. Sorte	Mischung
2	32 kg	-32 kg	0 kg
3			
4	12,2 DM/kg	8,6 DM/kg	10,2 DM/kg
5			
6	-----	-----	-----
7	390,4 DM	-275,2 DM	115,2 DM

Um den Vorgang der Iteration schrittweise nachvollziehen zu können, stellt man bei Zusätze *Sofort Rechnen* auf [Ja] und *Iteration* auf [Nein]; [Enter]; so kann man jeweils durch Drücken der Taste *F4* das Ergebnis nach einem weiteren Iterationsschritt im Rechenblatt erkennen. Gleichzeitig erscheint die Fehlermeldung „Endloschleife“. Die Werte für die Menge der 2. Sorte x ändern sich schrittweise folgendermaßen:

0. Schritt	0
1. Schritt	-32
2. Schritt	-20,70588
3. Schritt	-11,18339
:	:
20. Schritt	37,626998

:	:
110. Schritt	40
:	:

Das hier beschriebene Verfahren läuft wesentlich schneller ab, sobald man die Neuberechnungen automatisch durchführen läßt. Dazu stellt man unter Zusätze *Iteration* auf [Ja], [Enter]. Sofort wird die Iteration durchgeführt und bleibt für $x = 39,999532$ stehen. Dies rührt daher, daß die Iteration abgebrochen wird, wenn sich zwischen 2 Iterationsschritten keiner der beteiligten Zahlenwerte um mehr als 10^{-3} geändert hat. Durch Drücken der Taste "!" kann man zusätzliche Iterationsschritte erzwingen und dadurch eine bessere Näherung erhalten. Dies kann man auch durch ein

Menge einer Sorte und Gesamtmenge der Mischung (Iteration)			
=====			
	1. Sorte	2. Sorte	Mischung
Menge	32 kg	40 kg	72 kg
Preis je kg	12,20 DM	8,60 DM	10,20 DM
=====			
Gesamtpreis	390,40 DM	344,00 DM	734,40 DM
Delta (Δ): 4,55884E-10			

Setzen eines Endkriteriums erreichen z. B. Endkriterium $\Delta < 10^{-10}$. Wobei die Funktion Delta (Δ) die größte Änderung liefert, die bei einem beteiligten Zahlenpaar stattgefunden hat. Dann könnte eine endgültige Fassung des Rechenblattes wie oben aussehen.

Damit beim Arbeiten mit dem Rechenblatt die Formeln in den Feldern durch Falscheingabe nicht zufällig zerstört werden können, sollte man diese Felder schützen.

Nun kann man mit dem fertigen Rechenblatt experimentieren. So kann man beispielsweise untersuchen was geschieht, wenn:

- der Mischungspreis unter dem Preis einer Sorte liegt,
- der Mischungspreis über dem Preis beider Sorten liegt,
- der Preis der 1. Sorte und der Mischungspreis gleich sind,
- der Preis der 2. Sorte höher liegt als der Preis der 1. Sorte,
- der Preis der 2. Sorte und der Mischungspreis gleich sind.

Während die Ergebnisse von Experiment 1 bis Experiment 3 verständlich sind, überraschen das Experiment 4 und 5, da sie zu völlig falschen Ergebnissen führen. Dies führt dann automatisch auf die Frage: „Was passiert denn eigentlich bei der Iteration?“

Zum besseren Verständnis zeichnet man sich die beiden Geraden die man der Berechnung des Gesamtpreises erhalten hat nämlich die Gleichung

$$y = 8,6 * x + 390,4 \quad (I)$$

$$\text{und } y = 10,2 * x + 326,4 \quad (II)$$

in ein Koordinatensystem ein. Ausgehend von einem Punkt P_0 auf dem Graphen zu (I) geht man parallel zur x-Achse bis man den Schnittpunkt P_1 auf dem Graphen zu (II) erhält. Von diesem Punkt P_1 nun geht man parallel zur y-Achse bis man den Schnittpunkt P_2 auf dem Graphen zu (I) erhält. Dieses Verfahren setzt man nun fort, bis man am Schnittpunkt $S(40 | 734,4)$ angelangt ist. Sehr schön lässt sich dies anschaulich mit Hilfe des Programms Vivitab darstellen (Bild 4.5.1).

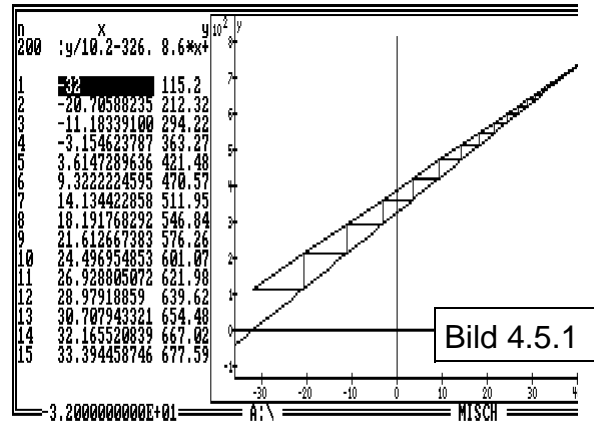


Bild 4.5.1

Wenn man den Preis der 2. Sorte höher setzt als den der 1. Sorte, dann wird in der Geradengleichung (I) die Steigung größer, während die Steigung in der Geradengleichung (II) sich nicht ändert. Wendet man nun das Iterationsverfahren wie oben beschrieben an, so bewegt man sich immer weiter vom Schnittpunkt weg (Bild 4.5.2). Man erhält auf Grund der divergierenden Zahlenfolge keinen Schnittpunkt, obwohl in Realität einer existiert.

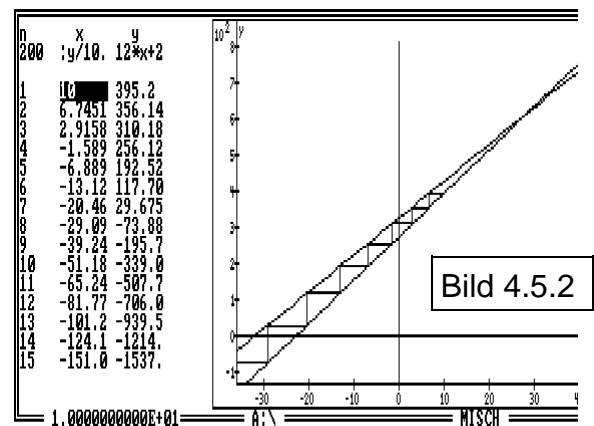


Bild 4.5.2

Ist hingegen der Mischungspreis gleich dem Preis der 2. Sorte, so sind die Steigungen der Geraden (I) und der Geraden (II) gleich und es existiert kein Schnittpunkt und auch keine Lösung!

4.6 Lineare Optimierung

4.6.1 Didaktik und Methodik

Die lineare Optimierung bietet sich in hervorragender Weise als interessantes Anwendungsgebiet und als Erweiterung zu den Themenbereichen lineare Gleichungen und Ungleichungen sowie lineare Gleichungs- und Ungleichungssysteme an. Die Grundprobleme und Methoden, soweit diese für den Bereich der SI relevant sind, können anhand interessanter Aufgabenstellungen erschlossen werden und bieten so die Möglichkeit, das stereotype Einüben des Lehrstoffes anhand gleichartiger Aufgaben zu vermeiden und stattdessen die Festigung abwechslungsreicher, praxisnäher und damit effizienter zu gestalten. Derartige Problemstellungen spielen als Optimierungs- bzw. Rationalisierungsprobleme in Wirtschaft, Industrie und Technik (z. B. Produktionsoptimierung, Zuschnittprobleme, optimale Bebauungspläne, Zuordnungsprobleme, Transportprobleme, Wegeoptimierung usw.) eine bedeutsame Rolle und gehören somit in den Blickwinkel des Real-schülers.

Anknüpfungspunkte lt. Lehrplan:

Lineare Gleichungs- und Ungleichungssysteme.

Zeitlicher Aufwand:

Wegen der Bedeutung und des interessanten Charakters derartiger Problemstellungen sollten mindestens 4 Unterrichtsstunden angesetzt werden.

Didaktische, methodische Hinweise:

- Einfache Beispiele (2 Variable), die durch Überlegung überprüfbar sind.
- Graphische Lösung des Problems (Anschaulichkeit).

- Wesentlich ist, daß der Schüler lernt, die im Text enthaltenen und für die Lösung des Problems relevanten Informationen in Form von linearen Gleichungen darzustellen sowie die Schnittmenge der durch die Ungleichungen beschriebenen Halbebenen als „Planungsvieleck“ zu interpretieren, dessen innere Punkte und Randpunkte graphisch die Gesamtheit der möglichen Lösungen darstellen.
- Erkennen, daß durch eine Zusatzbedingung von diesen möglichen Lösungen solche ausgewählt werden, die eine „Ziel-“Funktion (mit Formvariable) erfüllen.

Hinführung:

Zum Problem des linearen Optimierens kann z. B. durch eine Aufgabe folgender Art hingeführt werden:

Die Punkte $A(0|0)$, $B(7|0)$, $C(6|4)$ und $D(0|6)$ bestimmen ein Viereck V_{ABCD} . Gesucht sind Punkte $P(x|y) \hat{I} V$ mit $x + y$ maximal.

Lösungsweg:

- Beschreiben von V_{ABCD} durch ein System linearer Ungleichungen.
- Für Punkte $P(x|y)$, deren Koordinatensumme den Wert z hat, gilt: $y = -x + z$ (Zielfunktion mit Formvariable z).
- Graph der Zielfunktion ist eine Parallelschar $g(z)$, wobei die Geraden der Schar die Steigung -1 und den y -Achsenabschnitt z haben.
- Punkte $P(x|y) \hat{I} V$ mit $x + y = z$ und z maximal müssen auf einer Geraden g^* der Schar liegen, deren y -Achsen-

Abschnitt z^* den größten Wert aufweist.

- Graphische Lösung; Erkennen eines allgemeinen Lösungsprinzips.
- Da für den Bereich der SI nur eine graphische Lösung in Frage kommt, bietet sich der Einsatz eines Plot-Programms an.

4.6.2 Anmerkung (Beschränkung auf zwei Variable)

$$\left. \begin{array}{l} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 \geq 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_m \cdot x + b_m \cdot y + c_m \geq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{beschreibt} \\ \text{konvexes Polygon} \\ \text{Planungsvieleck} \end{array}$$

Es sollen nicht-negative Werte x und y so bestimmt werden, daß das System linearer Ungleichungen erfüllt ist und außerdem eine lineare Funktion, die für den Bereich des Planungsvielecks definiert ist:

$z = f(x,y) = ax + by + c$ } **Zielfunktion**
einen extremen (minimalen oder maximalen) Wert annimmt.

Diese Zielfunktion ist für den Bereich des Planungsvielecks definiert und soll ein extremum annehmen (Geradenschar mit Steigung $-\frac{a}{b}$ und Achsenabschnitt $\frac{z-c}{b}$).

Hauptsatz:

Die über einem konvexen Polygon definierte lineare Funktion $z = ax + by + c$ nimmt ihr Maximum (oder ihr Minimum) stets auf einem Randpunkt (oder einer Randstrecke; instabiler Fall) des Planungsvielecks an.

Beweis:

Der höchste (tiefste) Punkt eines ebenen Prismenschnitts muß notwendigerweise auf seinem Rand liegen, d. h. in einem Eckpunkt oder in allen Punkten einer Schnittkante.

Die Bestimmung des Extremums der Zielfunktion läuft somit auf die Bestimmung desjenigen Eckpunktes des Planungsvielecks hinaus, welcher zugleich Element derjenigen Geraden der Schar mit dem größten y -Achsenabschnitt ist (Graphische Veranschaulichung und graphische Lösung).

4.6.3 Beispiel

In einer Fabrik werden u. a. zwei Sorten von Fernsehgeräten, Standgeräte und tragbare Geräte gefertigt.

Die Herstellung eines Standgerätes dauert 2 Stunden mit Maschine A, 1 Stunde mit Maschine B und mit Maschine C ebenfalls 1 Stunde. Ein tragbares Gerät kann mit Maschine A in 1 Stunde, mit Maschine B in 2 Stunden und mit Maschine C in einer Stunde gefertigt werden. Die Maschine A läuft monatlich höchstens 180, Maschine B höchstens 160 und die Maschine C höchstens 100 Stunden.

Beim Verkauf werden für ein Standgerät DM 4.- und für ein tragbares Gerät DM 6.- Reingewinn erzielt.

Wie viele Geräte sollen von jeder der beiden Sorten produziert werden, damit ein maximaler Gewinn erzielt wird? (Voraussetzung: alle Geräte werden verkauft)

Erarbeitung im Unterricht, Analyse der Problemstellung

Lösung:

- Einzeichnen der Graphen zu den einzelnen Ungleichungen in ein Koordinatensystem →

	Monatlich	Herstellung mit Maschine/St.			Gewinn DM/Std.
		A	B	C	
Maximale Betriebszeit in Std.		180	160	100	
Standgerät x		2	1	1	4
Tragbares Gerät y		1	2	1	6

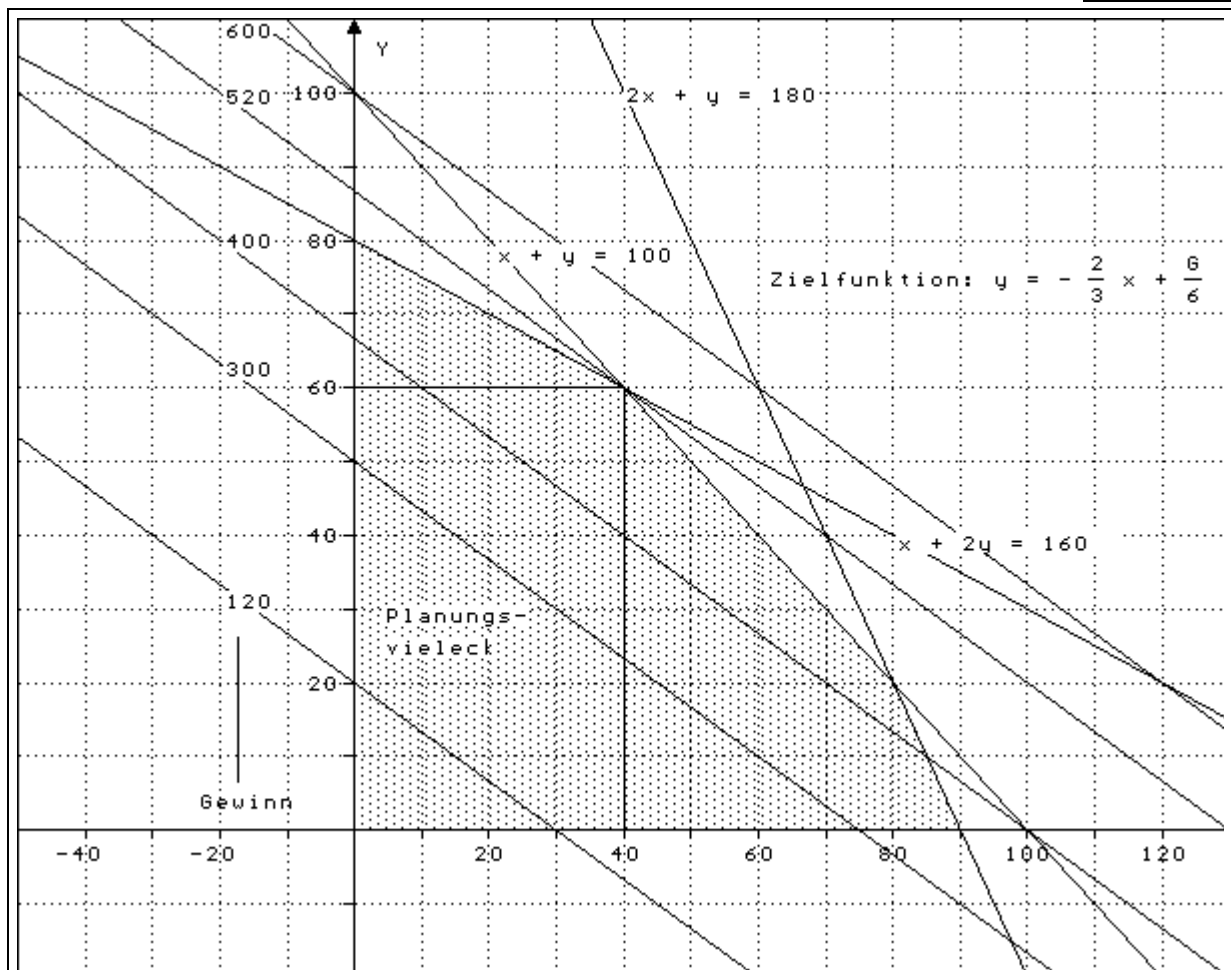
$x > 0$ und $y > 0$ ←
 $2x + y \leq 180$ ←
 $x + 2y \leq 160$ ←
 $x + y \leq 100$ ←

Monatlicher Gewinn: $G = 4x + 6y$ ← Ziel: G maximal
 $y = -\frac{2}{3}x + \frac{G}{6}$ ←

- Planungsvieleck V.
Welche Eigenschaft haben Punkte $P(x|y) \hat{I} g$?
- Eintragen des Graphen der Zielfunktion für bestimmte Belegungen von G, z. B. $G = 120, G = 300, G = 400, G = 500, G = 600 \rightarrow$ Parallelschar $g(G)$.

- Welche Eigenschaft haben Punkte $P(x|y) \hat{I} g$?
- $P(x|y)$ so, daß $P \hat{I} V$ und $P \hat{I} g^*$ und G^* maximal.
 - Eventuell zusätzliche rechnerische Lösung mit Hilfe eines Standard-Werkzeugs.

Bild 4.6.1
Turboplot



```

*****
Eureka: The Solver, Version
1.0
Friday November 29, 1991,
11:07 am.
Name of input file:
C:\MATH\EUREKA\LINOPT
*****
;Beispiel zu "Lineare
Optimierung"
;=====
;Gewinnfunktion
(Zielfunktion):
      Gewinn = 4*x + 6*y
      $max(Gewinn)
;Ungleichungssystem
(Planungsvieleck):
      x > 0
      y > 0
      2*x + y <= 180
      x + 2*y <= 160
      x + y <= 100
*****
Solution:
Variables Values
Gewinn      =      520.00000
x           =      40.00000
y           =      60.00000

```

4.6.4 Weitere Aufgaben

1. Zwischen zwei größeren Orten soll eine Busverbindung eingerichtet werden. Die täglichen Kosten (Lohn, Kraftstoff, Wartung, Amortisation usw.) belaufen sich auf u DM (1200.-). Als Fahrpreise sind vorgesehen: a DM (6.80) für eine Einzelfahrt, Schüler und Berufstätige die Hälfte. Insgesamt können täglich n (800) Personen befördert werden. Es soll untersucht werden, wann mit Gewinn zu rechnen ist.

Personen mit Normalpreis: x
Personen mit Ermäßigung: y

$$[x \geq 0; y \leq 0; x + y \leq n; ax + 0,5 ay > u]$$

2. Ein Geschäftsinhaber will seinen Kunden zum Neuen Jahr Kalender (Stückpreis DM 4.- oder a) und Notizbücher (Stückpreis DM 10.-

oder b) schenken. Er will dafür aber nicht mehr als DM 10 000.- (m) investieren.

Kalender: x
Notizbücher: y

a) Stelle die Möglichkeiten graphisch dar.

b) Welche Änderungen entstehen durch die folgenden zusätzlichen Bedingungen? Mindestens 400 besonders geschätzte Kunden sollen die teureren Notizbücher erhalten; es sind insgesamt nicht mehr als 1600 Kunden.

3. Eine Hütte bezieht ihr Erz von zwei Gruben A und B . Aufgrund von langfristigen Lieferverträgen müssen von A wöchentlich mindestens 50 t, von B mindestens 80 t abgenommen werden, während andererseits A bzw. B nicht mehr als 400 t bzw. 200 t wöchentlich liefern können. Die Hütte selbst kann nicht mehr als 500 t Erz in einer Woche verarbeiten.

Der Reingewinn beim Verhütten von 1 t Erz beträgt a bzw. b DM für die beiden Erzsorten.

Es soll der maximale Gewinn bei verschiedenen wirtschaftlichen Situationen untersucht werden.

Fall 1: $a > b$, z. B. $a = 60$ DM und $b = 40$ DM

Fall 2: $a < b$, z. B. $a = 40$ DM und $b = 60$ DM

Fall 3: $a = b$, instabiler Fall; Steigung der der Ziel-/Gewinnfunktion entsprechenden Geraden ($g = ax + by$ (DM)) ist -1 , d. h. alle Punkte einer Strecke des Planungsvielecks ergeben einen maximalen Gewinn.)

4. Ein Auslieferer muß auf seiner 160 km langen Rundfahrt mit seinem Wagen 20 Kunden besuchen,

wofür ihm 8 Stunden zur Verfügung stehen.

a) Welchen Bedingungen müssen Besuchszeit x und Zeit y (die er für 1 km benötigt) genügen?

b) Welche zusätzlichen Ungleichungen kommen hinzu, wenn er wegen der Zahlungsformalitäten bei jedem Kunden mit einem Aufenthalt von mindestens 5 Minuten rechnen muß und wenn er ferner wegen der Geschwindigkeitsbegrenzung nicht schneller als 50 km/h fahren kann?

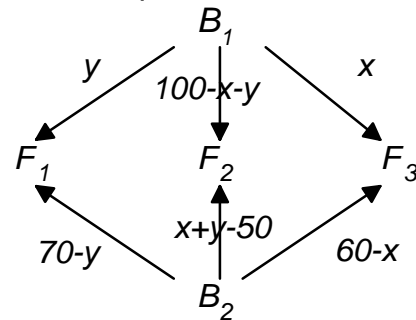
5. Zwei Kohlebergwerke B_1 und B_2 sollen die Fabriken F_1 , F_2 und F_3 versorgen. Der tägliche Ausstoß der Bergwerke betrage 100 t bzw. 80 t, der davon zu deckende Bedarf der 3 Fabriken 60 t, 70 t und 50 t. Aufgrund der gegenseitigen Entfernungen und der zur Verfügung stehenden Beförderungsmittel ergibt sich für die Transportkosten in DM pro Tonne die folgende Tabelle

von \ nach	F_1	F_2	F_3
B_1	60	40	20
B_2	50	40	30

Um die Versorgung der Fabriken wirtschaftlich zu gestalten, hat man zu entscheiden, wieviel Tonnen jedes Bergwerk an jede der drei Fabriken liefern muß, um seine

Erzeugnisse abzusetzen, um den Bedarf jeder Fabrik zu decken und um die gesamten Transportkosten so niedrig wie möglich zu halten.

Die von den Bergwerken an die Fabriken zu liefernden Mengen (t) kann man in Form des nebenstehenden Graphen darstellen.



Die gesamten Beförderungskosten betragen:

$$K = 60x + 40y + 20(100-x-y) + 50(60-x) + 40(70-y) + 30(x+y-50)$$

$$K = 6300 + 20x + 10y$$

Für x und y gelten die folgenden Nebenbedingungen:

$$x \geq 0, y \geq 0$$

$$100 - x - y \geq 0$$

$$60 - x \geq 0$$

$$70 - y \geq 0$$

$$x + y - 50 \geq 0$$

Hinweis: Beweis des Hauptsatzes und Aufgaben zum Linearen Optimieren s. Handbuch der Schulmathematik, Band 2, S. 60 - 66.

4.7 Lösen von Gleichungen durch Iteration

4.7.1 Ziel:

Der Schüler soll an einigen Beispielen erfahren, daß es neben den üblichen Gleichungen, die sich formelmäßig in geschlossener Form lösen lassen, ein weites Feld von Gleichungstypen gibt, bei denen man nur mit Hilfe von Näherungsverfahren zu Lösungen gelangen kann. Das Lösen einer (z. B. transzendenten) Gleichung durch einen Iterationsprozeß bietet einerseits eine experimentelle Komponente und vermeidet es andererseits, dem Schüler eine "heile Welt der Gleichungslehre" vorzutäuschen, in der sich alle auftretenden Gleichungen elegant und durch formale algebraische Verfahren lösen lassen.

Zeitbedarf:

Zwei Unterrichtsstunden für ein Beispiel.

Software:

Man kann den Iterationsalgorithmus selbstverständlich in einer Programmiersprache codieren, falls die Schüler über Programmiererfahrungen verfügen. In der Regel aber wird man, nachdem der Mechanismus der Iteration (Iterationsvorschrift, Startwert, Iterationstiefe, Zuweisung: neuer Wert ← alter Wert) erarbeitet wurde, ein Programmwerkzeug (z. B. Vivitab, Derive, Iterationen) einsetzen. Nicht versäumt werden sollte dabei, den Iterationsprozeß auch graphisch darzustellen, um so die Art und die Geschwindigkeit der Iteration zusätzlich zu veranschaulichen.

4.7.2 Aufgabe:

Ein Öltank hat die Form eines liegenden Zylinders mit dem Radius r ($= 1\text{m}$) und der Länge l .

a) Wie hoch steht das Öl im Tank, wenn dieser zu $q\%$ (25%) gefüllt ist?

b) Es ist eine Höhenskala für $q = 10\%; 20\%; 30\%; \dots 100\%$ zu erstellen.

c) Welche Lösung ergibt sich, wenn $q := k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{IN}$) ist?

Höhe der Tankfüllung:

$$h = r \cdot \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$A_{\text{Segment}} = A_{\text{Sektor}} - A_{\text{Dreieck}}$$

$$r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360} - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \alpha$$

Geht man zum Bogenmaß des Winkels α über, so ergibt sich:

$$A_{\text{Segment}} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \alpha - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \alpha$$

Füllung des Öltanks

$$q \cdot l \cdot \pi \cdot r^2 = l \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot (\alpha - \sin \alpha)$$

$$\text{Volumen } \boxed{2 \cdot q \cdot \pi = \alpha - \sin \alpha} \quad (1)$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind Fixpunkte von

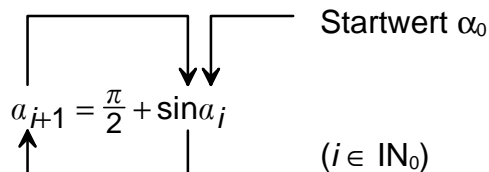
$$\boxed{f: \alpha \rightarrow 2 \cdot q \cdot \pi + \sin \alpha; q \in \mathbb{R}^+}$$

Man erkennt, daß die Lösung vom Radius r und von der Länge l des Öltanks unabhängig ist. Mit $q = 0,25$ erhält man:

$$\frac{\pi}{2} = \alpha - \sin \alpha \quad (1')$$

$$f: \alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} + \sin \alpha$$

Da wir kein Verfahren kennen, eine Gleichung der Art (1) bzw. (1') zu lösen, bestimmen wir die Lösung(en) durch eine Iteration:



: : : :

```

Modell-Editor
n = 50
a(n) = :a(n+1)
a(n+1) = 2*q*pi+sin(a(n))
h = r*(1-cos((a(n)/2))
Tabellenkonstanten
q = 0.25   r = 1
    
```

Bild 4.7.1

Die Iteration der Lösung wurde mit Vivitab (Bild 4.7.1 und 4.7.2) bzw. mit dem Programm „Iterationen“ (Klett-Verlag, Bild 4.7.3) durchgeführt.

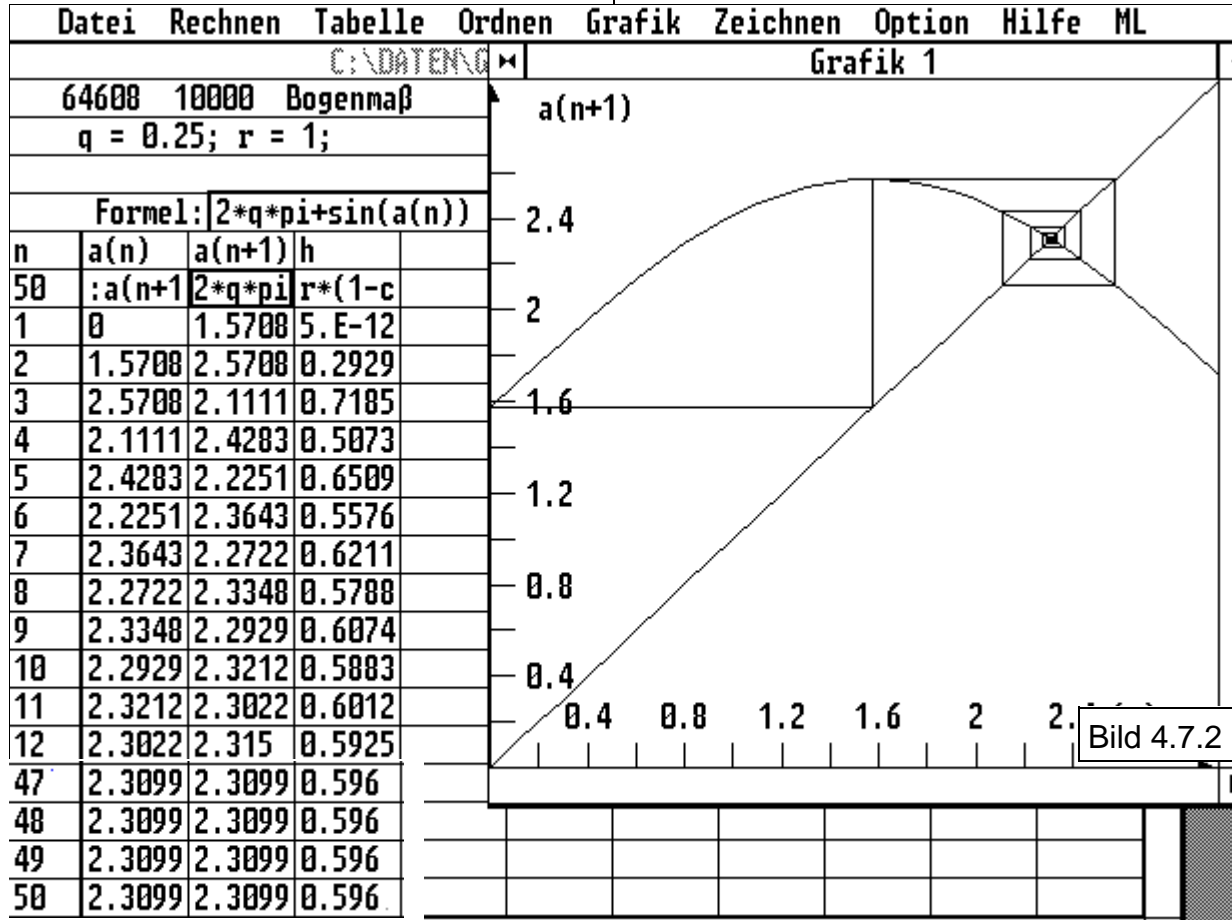


Bild 4.7.2

Die in b) geforderte Höhenskala ergibt sich, wenn man bei Verwendung des Werkzeugs Vivitab jeweils vor dem R(echnen) den Wert der Konstanten q ändert:

q in %	α in Bogenmaß	h in m (r = 1m)
0	0	0
10	1,63	0,31
20	2,11	0,51
30	2,49	0,68
40	2,8	0,83
50	3,14	1
60	3,48	1,17

70	3,79	1,32
80	4,17	1,49
90	4,66	1,69
100	6,28	2

4.7.3 Aufgabe:

Die Kanten eines Quaders (a = 5, b = 4, c = 7 LE) werden jeweils um dasselbe Stück x (LE) verlängert. Wie muß x gewählt werden, damit das Volumen des neuen Quaders doppelt so groß ist wie das des alten?

Für x ergibt sich die Gleichung 3.

Grades:

$$x^3 + 16 \cdot x^2 + 83 \cdot x - 140 = 0$$

Die Lösung ergibt sich durch Iteration mit

$$f: x \rightarrow \frac{140}{x^2 + 16 \cdot x + 83} \quad (\text{Bild 4.7.4})$$

Zusatz: Die Iteration der Lösung soll mit anderen Iterationsfunktionen durchgeführt werden.

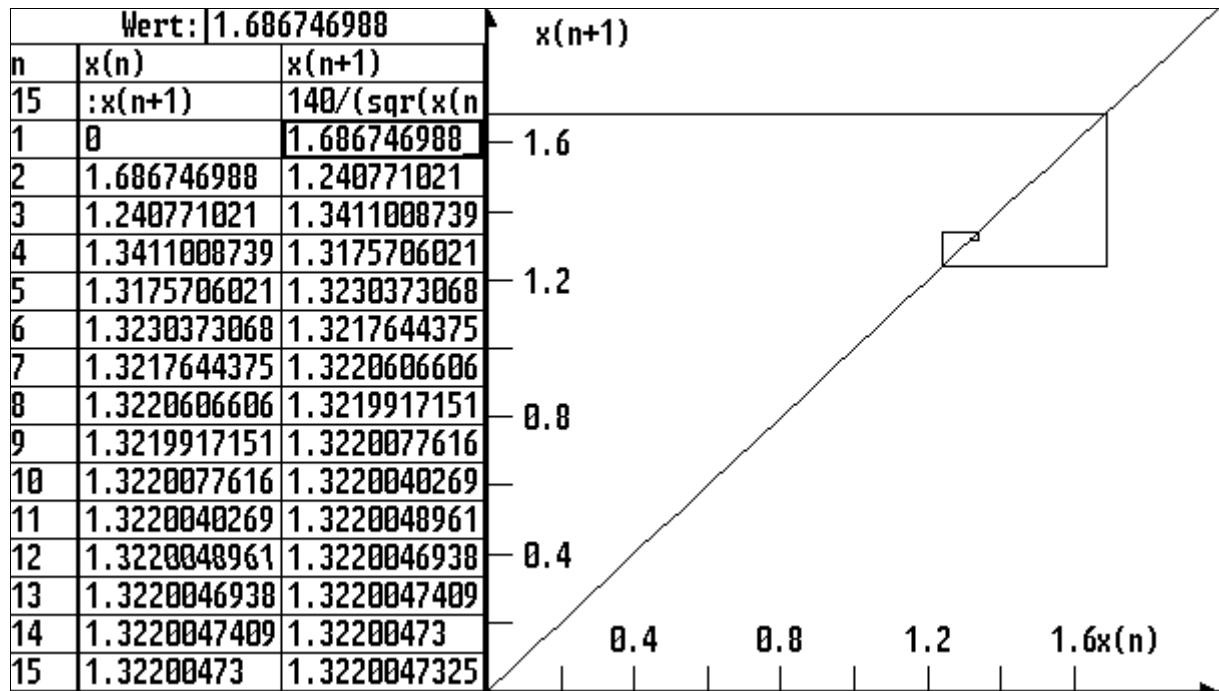


Bild 4.7.4

4.8 Lösen einer Gleichung dritten Grades, Lösen einer transzendenten Gleichung

4.8.1 Vorbemerkungen

Bereich:
Numerische Lösungsverfahren von Gleichungen

Thema:
Lösen von Gleichungen dritten Grades

Aufgabe: Schwimmende Kugel.
Eine Kugel mit der Dichte d ($d < 1$) schwimmt im Wasser. Wie tief taucht sie ein?

Werkzeug:
Vivitab

4.8.2 Mathematisierung:

Die Kugel mit dem Radius r hat eine Masse $m = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot d$. Die Eintauchtiefe der Kugel ist x (siehe Bild 4.8.1).

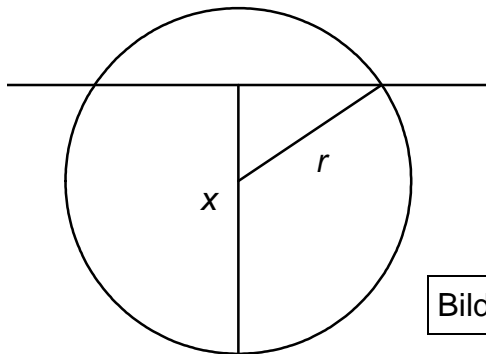


Bild 4.8.1

Die verdrängte Wassermenge hat das Volumen $V = x^2 \cdot \left(r - \frac{x}{3}\right) \cdot \pi$. Nach dem archimedischen Prinzip folgt daraus

$$\frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot d = x^2 \cdot \left(r - \frac{x}{3}\right) \cdot \pi$$

$$x^3 - 3 \cdot r \cdot x^2 + 4 \cdot d \cdot r^3 = 0$$

Das ist eine Gleichung 3. Grades, für die es in der Schule kein algebraisches Lösungsverfahren gibt.

4.8.3 Iterative Lösung:

Das Lösen der Gleichung wird auf den Schnitt zweier Graphen zurückgeführt.

$$(1) \quad x^3 - 3 \cdot r \cdot x^2 + 4 \cdot d \cdot r^3 = 0$$

$$x^3 + 4 \cdot d \cdot r^3 = 3 \cdot r \cdot x^2$$

$$(2) \quad f(x) = x^3 + 4 \cdot d \cdot r^3$$

$$(3) \quad g(x) = 3 \cdot r \cdot x^2$$

$g(x)$ hat die Umkehrfunktion

$$h(y) = g^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y}{3 \cdot r}}$$

Das Verfahren besteht darin, aus der Gleichung $g(x) = f(x)$ eine Iteration $x := g^{-1}(f(x))$ zu machen. Man fängt mit einem beliebigen Wert in der Nähe der vermuteten Lösung an und hofft, daß die Iteration konvergiert.

Die Zerlegung der Gleichung (1) in zwei Funktionen (2) und (3) ist ziemlich willkürlich. Eine der beiden Funktionen muß sich umkehren lassen. Im übrigen heiligt der Zweck die Mittel, d. h. wenn die Iteration konvergiert, war die Zerlegung brauchbar.

Die Eingaben in eine Tabelle mit 15 Zeilen lauten:

Vereinbarungen:

$$r = 1, \quad d = 0,75$$

$$f(x) = x^3 + 4 \cdot d \cdot r^3$$

$$g(x) = 3 \cdot r \cdot x^2$$

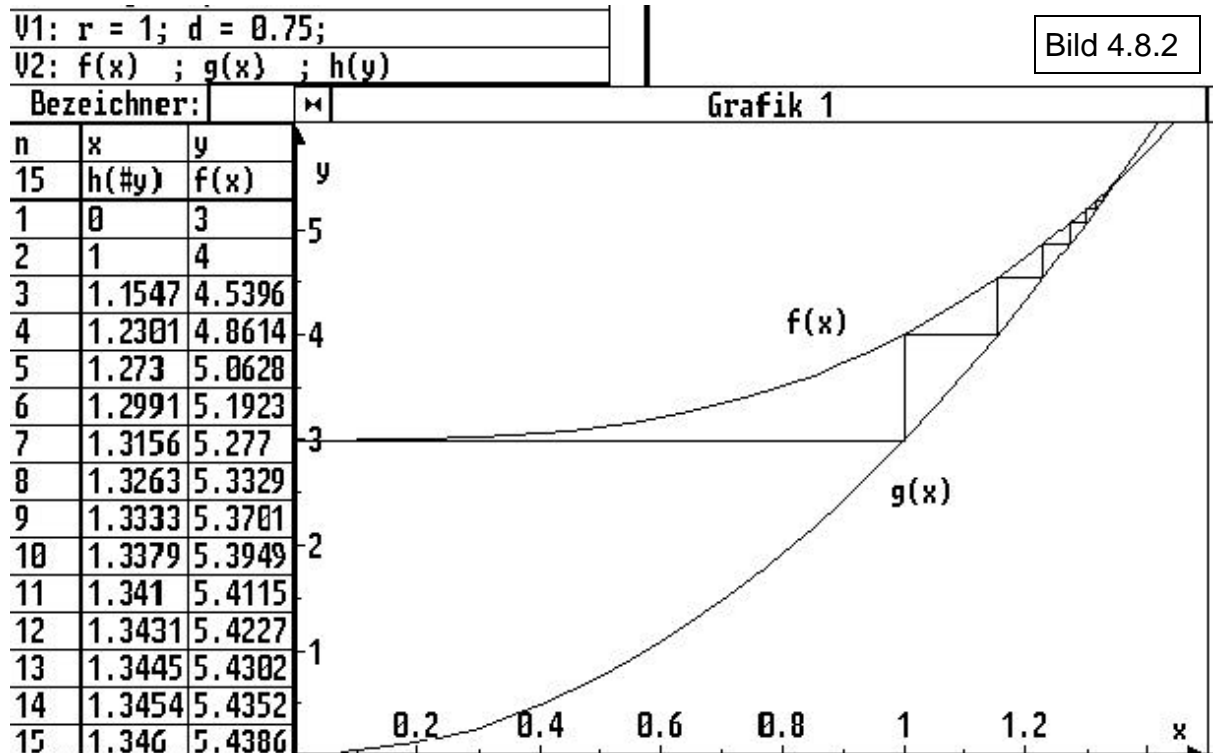
$$h(y) = \sqrt{\frac{y}{3 \cdot r}} \quad \{\text{Umkehrfunktion von } g(x)\}$$

Spaltenformeln und Startwerte:

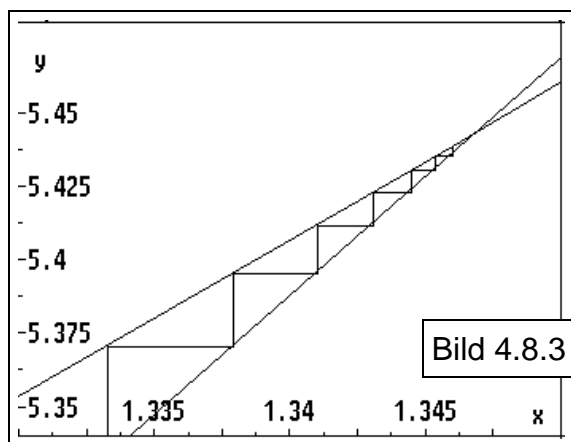
$$x = h(:y) \quad x(1) = 1$$

$$y = f(x)$$

Das Durchrechnen der Tabelle liefert in Spalte x den gesuchten Wert für die



Eintauchtiefe (siehe Bilder 4.8.2 und 4.8.3).



4.8.4 Lösung durch Intervallschachtelung:

Ein verständlicheres und sicheres Verfahren (ohne Konvergenzprobleme) ist eine Intervallschachtelung für die Gleichung $G(x) = 0$ mit

$$G(x) = x^3 - 3 \cdot r \cdot x^2 + 4 \cdot d \cdot r^3.$$

Dabei braucht man zwei Anfangswerte x_1 und x_2 mit $G(x_1) > 0$ und $G(x_2) < 0$. Die gesuchte Nullstelle liegt im Intervall

$[x_1, x_2]$. Für die schwimmende Kugel gilt offensichtlich $0 \leq x \leq 2 \cdot r$. Für $x = 0$ ist $G(x) = 4 \cdot d \cdot r^3 > 0$, für $x = 2 \cdot r$ ist $G(x) = 4 \cdot r^3 \cdot (d - 1) < 0$. Dann wird das Intervall halbiert: $x = (x_1 + x_2)/2$. Je nachdem ob $G(x)$ größer oder kleiner als 0 ist, wird x_1 oder x_2 durch x ersetzt, ansonsten bleibt x_1 bzw. x_2 .

Die Eingaben in eine Tabelle mit 15 Zeilen lauten:

Vereinbarungen:

$$r = 1; d = 0,75$$

$$G(x) = x^3 - 3 \cdot r \cdot x^2 + 4 \cdot d \cdot r^3$$

Spaltenformeln und Startwerte:

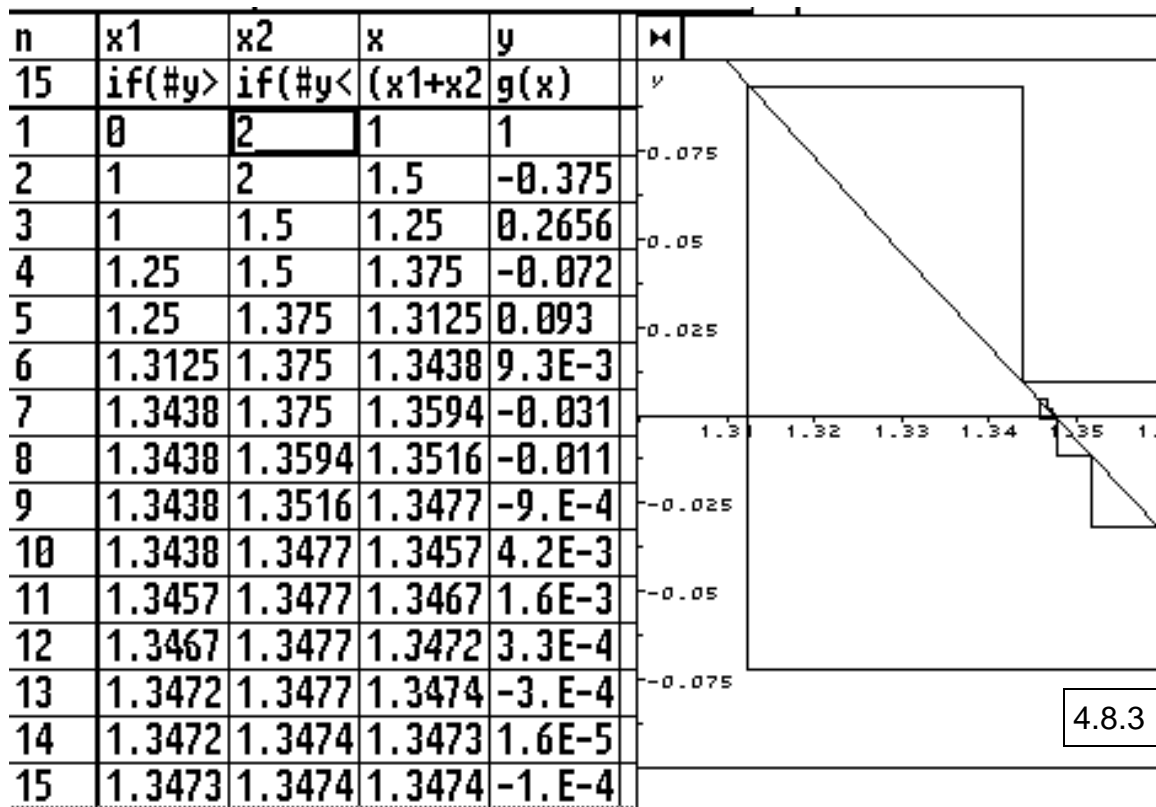
$$x_1 = \text{if}(:y > 0, :x, :x_1) \quad x_1(1) = 0$$

$$x_2 = \text{if}(:y < 0, :x, :x_2) \quad x_2(1) = 2$$

$$x = (x_1 + x_2)/2$$

$$y = G(x)$$

Das Durchrechnen liefert in Spalte x_1 eine untere Schranke und in Spalte x_2 eine obere Schranke für die Eintauchtiefe.



4.8.5 Weitere Aufgaben

Im Fall der iterativen Lösung die beiden Funktionsgraphen $f(x)$ und $g(x)$ zeichnen, wobei um den Schnittpunkt herum „gezoomt“ wird, d. h. $1,33 < x < 1,35$ und $5,35 < y < 5,45$; dazu die Iterationstreppe zeichnen.

Im Fall der Intervallschachtelung den Funktionsgraph von $G(x)$ zeichnen, wobei um die Nullstelle herum „gezoomt“ wird, d. h. $1,3 < x < 1,4$ und $-0,1 < y < 0,1$; dazu durch Zeichnen des Treppengraphen die Konvergenz veranschaulichen (Bild 4.8.3).

Für die iterative Lösung andere Zerlegungen der Gleichung dritten Grades $x^3 = 3*r*x^2 + 4*d*r^3 = 0$ vornehmen, z. B. $f(x) = 3*r*x^2 - 4*d*r^3$; $g(x) = x^3$; $h(y) = y^{1/3}$; oder $f(x) = x^3 - 3*r*x^2 + x + 4*d*r^3$; $g(x) = x$; $h(y) = y$ und untersuchen, ob die Iteration konvergiert.

5 Funktionen

5.1 TREFFER

Im Programm TREFFER geht es um graphische Darstellung von Funktionen. Es besteht aus vier Teilprogrammen mit unterschiedlicher Aufgabenstellung und Zielsetzung:

1. Kurve zeichnen
2. Gleichung finden
3. Kugeln treffen
4. Spuren suchen

5.1.1 Kurve zeichnen

Der erste Programmteil ist ein Funktionsplotter, der auf explizit angegebene Funktionen $y = f(x)$ oder $x = f(y)$ sowie auf implizite Kegelschnittgleichungen zugeschnitten ist. Er erlaubt eine schnelle Überprüfung von Parameterveränderungen in Funktionsgleichungen und verleiht den Schülern eine Fertigkeit in der Formulierung und in der Anwendung von Funktionsgleichungen. In diesem Programmteil wird gewöhnlich jeder neue Graph zu den schon gezeichneten hinzugefügt. Damit kann der Schüler die Auswirkung einer Veränderung in der Gleichung beobachten oder gezielt eine Funktionenschar zu erstellen. Das Programm erlaubt auch

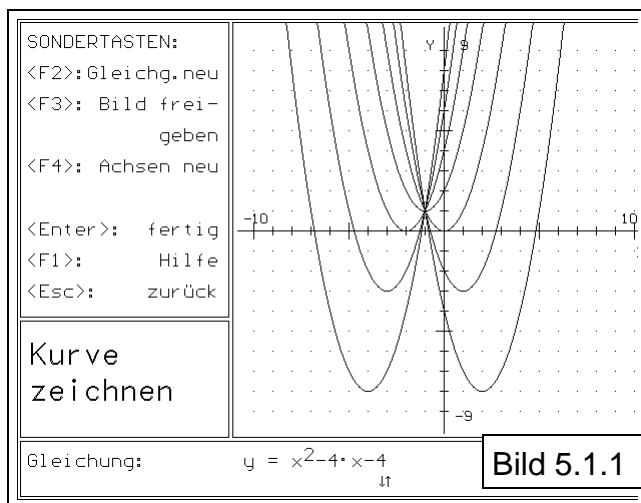


Bild 5.1.1

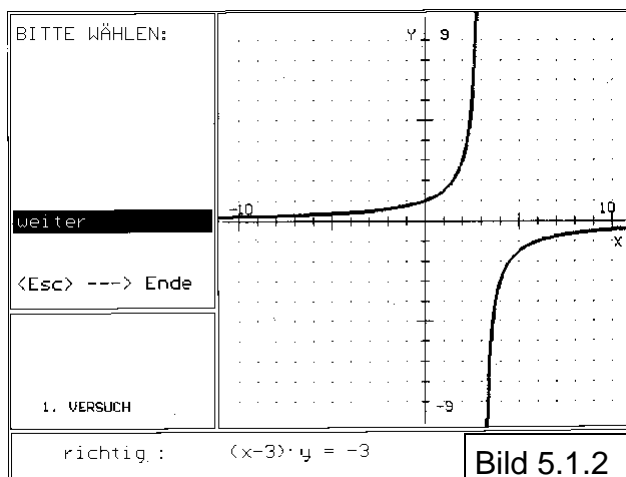


Bild 5.1.2

durch die Veränderung der Achseneinteilung einen Teil des Graphen vergrößert darzustellen, sie sozusagen zu „zoomen“ (Beispiel s. Bild 5.1.1).

5.1.2 Gleichung finden

Dieser Programmteil gibt auf dem Bildschirm eine Gerade oder einen Kegelschnitt im Achsenkreuz vor und der Benutzer soll die zugehörige Gleichung eingeben. Das Auffinden der richtigen Gleichung wird durch das Einzeichnen etwaiger falscher Versuche unterstützt. Der Schüler kann sich also „schrittweise“ an die Lösung annähern. Das Programm erhöht nach jeder richtig gefundenen Gleichung den Schwierigkeitsgrad. Auch in diesem Programmteil ist es möglich, durch eine Veränderung der Achseneinteilung einen Teil des Graphen vergrößert darzustellen und dadurch die Funktionsgleichung präziser zu bestimmen (Beispiel s. Bild 5.1.2).

5.1.3 Kugeln treffen

In diesem spielerischen Programmteil lernt der Schüler, Graphen durch vorgegebene Punkte zu legen. Im Achsenkreuz erscheinen nach Zufall verteilte Kugeln, die mit geeigneten Graphen „getroffen“ werden sollen. Eine Punktebewertung

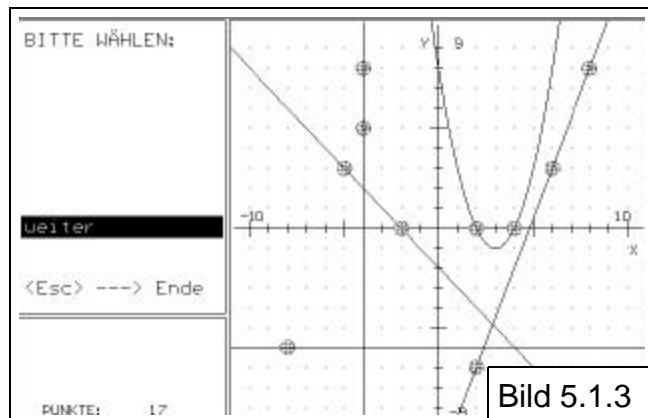


Bild 5.1.3

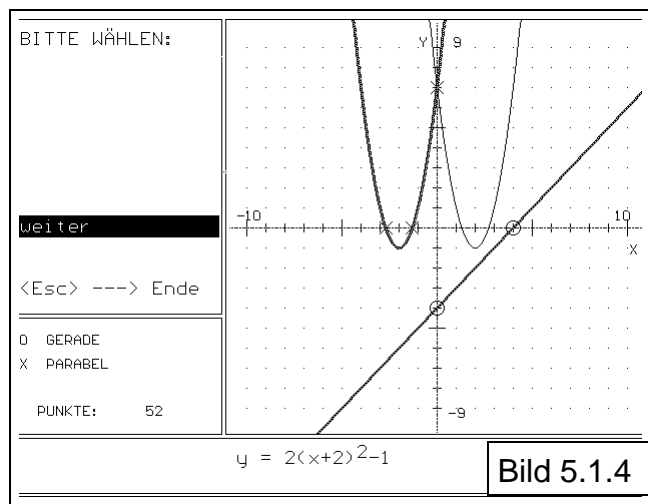


Bild 5.1.4

belohnt das Finden solcher Graphen, die viele Kugeln zugleich treffen. Das Spiel läßt sich in 2 Spielstufen einsetzen: dem Standardspiel und dem Expertenspiel. Im Standardspiel sind nur die Gleichungen von Geraden und Kegelschnitten zugelassen, im Expertenspiel weitere Funktionen $y = f(x)$ oder $x = f(y)$. Der Schüler trainiert dabei 2 Fähigkeiten: er muß sich die Graphen im Achsenkreuz vorstellen, die durch die markierten Punkte hindurchgehen und er muß für diese Graphen die richtige Gleichung finden (Beispiel s. Bild 5.1.3).

5.1.4 Spuren suchen

Im Achsenkreuz sind bis zu drei Graphen „versteckt“. Die Aufgabe der Schüler ist es, ihre Gleichungen anzugeben. Dazu kann er mit Geraden parallel zu den

Achsen „sondieren“. Das Programm markiert darauf die Schnittpunkte mit den versteckten Graphen. Es gilt mit möglichst wenig Sonden und Versuchen alle Gleichungen zu finden. Ein Punktsystem motiviert dabei den Schüler, eine sinnvolle Strategie zu wählen. Der Schüler lernt dabei (spielend), wie viele Punkte zur eindeutigen Festlegung einer Geraden oder eines Kegelschnitts mindestens erforderlich sind. Das Spiel „Spuren suchen“ läßt sich mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad einsetzen. Im Standardspiel bestimmt der Spieler selbst die Kurvenform, im Expertenspiel wird sie vom Programm vorgegeben (Beispiel s. Bild 5.1.4).

5.1.5 Zusammenfassung:

Das Programm läßt sich in den Unterricht einbeziehen, um den Zusammenhang zwischen der Gleichung und dem Graphen herzustellen oder einzuüben. Dabei sind verschiedene Einsatzformen möglich:

- Lehrerunterricht
- Gruppen- und Einzelunterricht
- Mischformen aus Lehrerunterricht und Einzelunterricht.

Die vier Programmteile lassen sich unabhängig voneinander einsetzen. Der Lehrer kann einzelne Programmteile, einzelne Funktionen und einzelne Spiele für den Schüler sperren und das Programm so dem fortschreitenden Unterricht oder der Schulart gemäß einsetzen. Für den Einsatz im Unterricht sind im Handbuch zu dem Programm eine Fülle von Arbeitsblättern zur Verfügung gestellt die sich im Unterricht bewährt haben. Kritisch anzumerken ist jedoch, daß das Programm leider keine Möglichkeit des Ausdrucks vorsieht.

5.2 Funktionen und Funktionenscharen

5.2.1 Funktion und Kehrfunktion

Das Bild der Parabel ist aus einer (x,y) -Wertetabelle entstanden mit der einfachen Funktionsvorschrift $y = x^2$; daran anschließend wurden lediglich die Achsenamen vertauscht und neu gezeichnet (Bild 5.2.1). Es ergibt sich sofort das Bild der Umkehrrelation. Für den besseren Überblick ist die Winkelhalbierende eingezeichnet. Man erkennt die Spiegelsymmetrie der beiden Graphen.

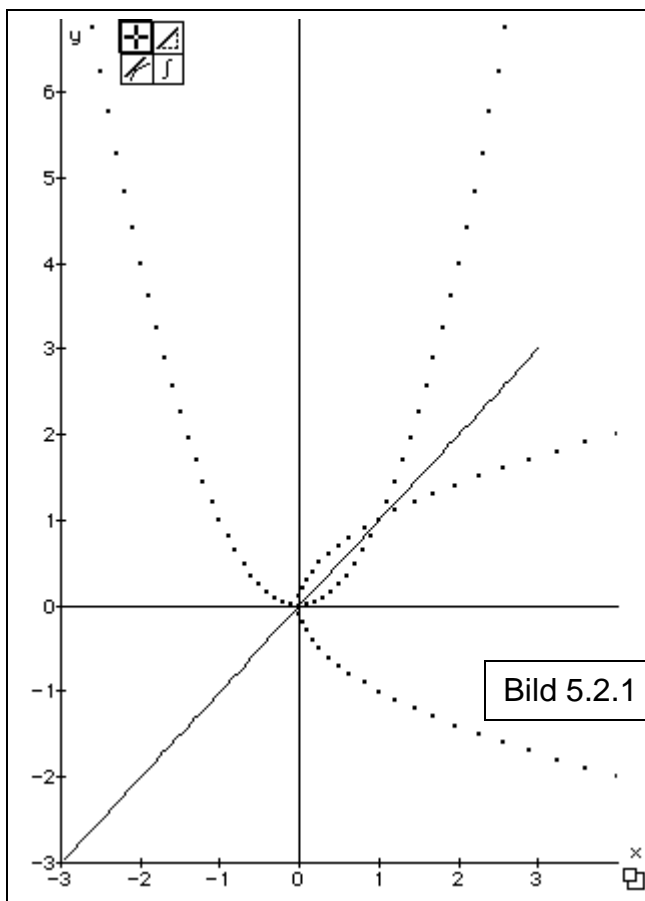


Bild 5.2.1

5.2.2 Funktionenscharen

Sei $y = f(x)$ $x \in ID$ eine Funktionsgleichung. Wenn in der Funktionsgleichung noch eine zusätzliche Formvariable

steht, von der ebenfalls ein Belegungsbereich angegeben ist, so spricht man von einer Funktionenschar.

Beispiel:

$y = f_a(x) = (x - a)^2$, $x \in [-3,3]$,
 $a = -2, -1, 0, 1, 2$. Es handelt sich dabei um 5 Parabeln (Bild 5.2.2).

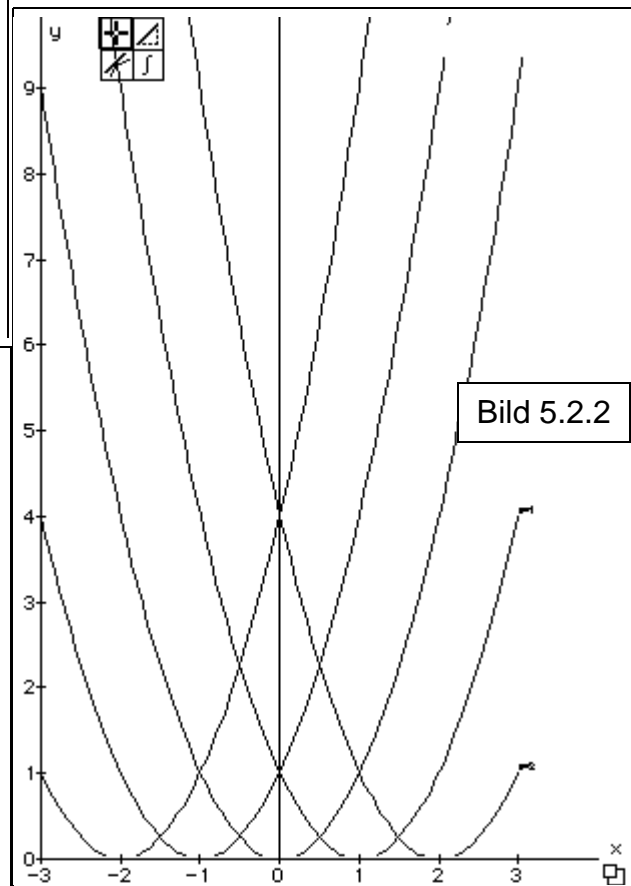


Bild 5.2.2

Mit dem Computer ist die Erstellung eines Funktionenplots und natürlich auch einer Funktionenschar ein schnelles Geschäft. Das nächste Bild (5.2.3) zeigt eine Funktionenschar, die aus der Schargleichung $\cos(x + \phi)$ entstanden ist. Das Bild zeigt die typische Handhabung. Es sind gleichzeitig Grafikfenster und Funktionsplotterfenster offen. Im Funktionsplotterfenster werden die Achsenvariablen und die Achsenabmessungen festgelegt. In der Zeile Parameter wird die Plotwiederholung durch die Belegung des Parameters ϕ gesteuert.

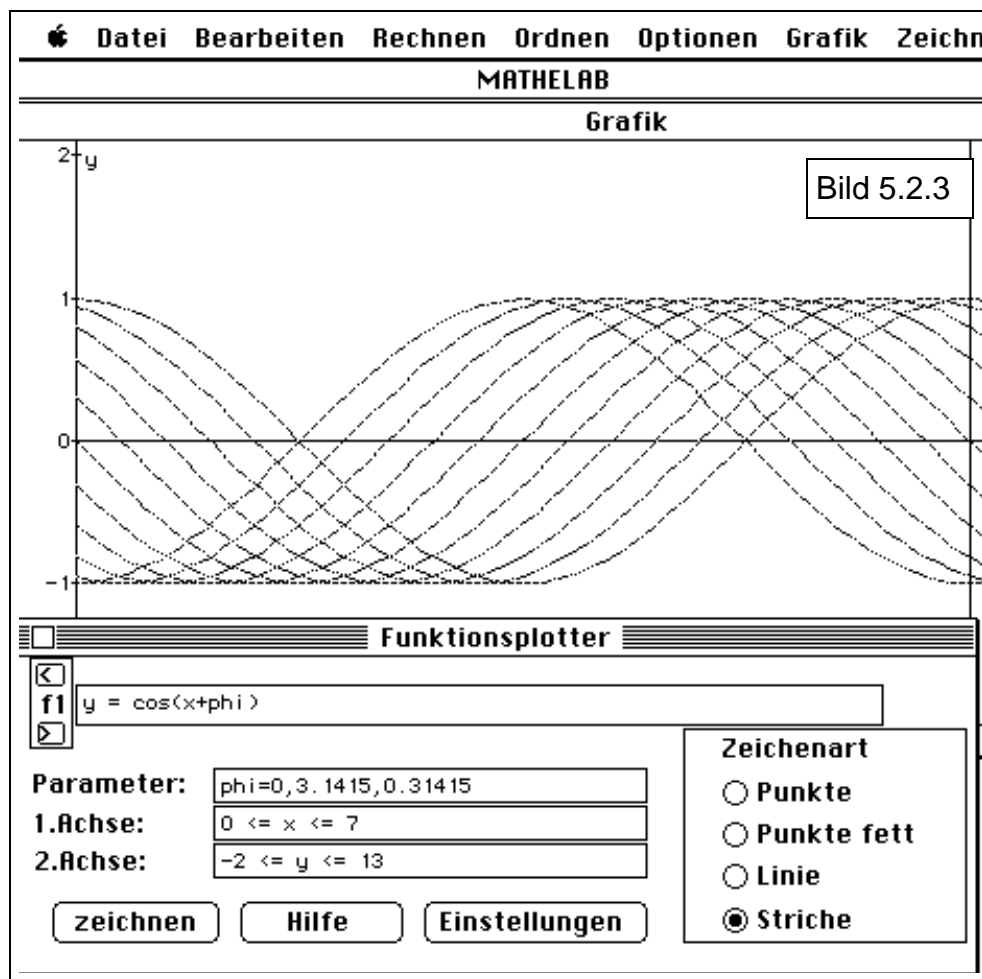


Bild 5.2.3

Unübersichtlicher werden die Graphen von Funktionsüberlagerungen. Hier ist es wohl ratsam, physikalische Interpretationen heranzuziehen wie bei der im folgenden dargestellten „Schwebung“, die aus der Überlagerung von Sinus- und Kosinus-Funktion entstanden ist (Bild 5.2.5 und 5.2.6).

Das nächste Bild (5.2.4) zeigt eine Funktionenschar $f_A(x) = A \cdot \sin(x)$, $x \in [0, 2]$, $A = -2, -1.8 \dots 2$.

```

n = 500
t = :t+dt; t(1)=0
x = sin(2*t)
y = cos(2.5*t)
z = x+y
    
```

Bild 5.2.5

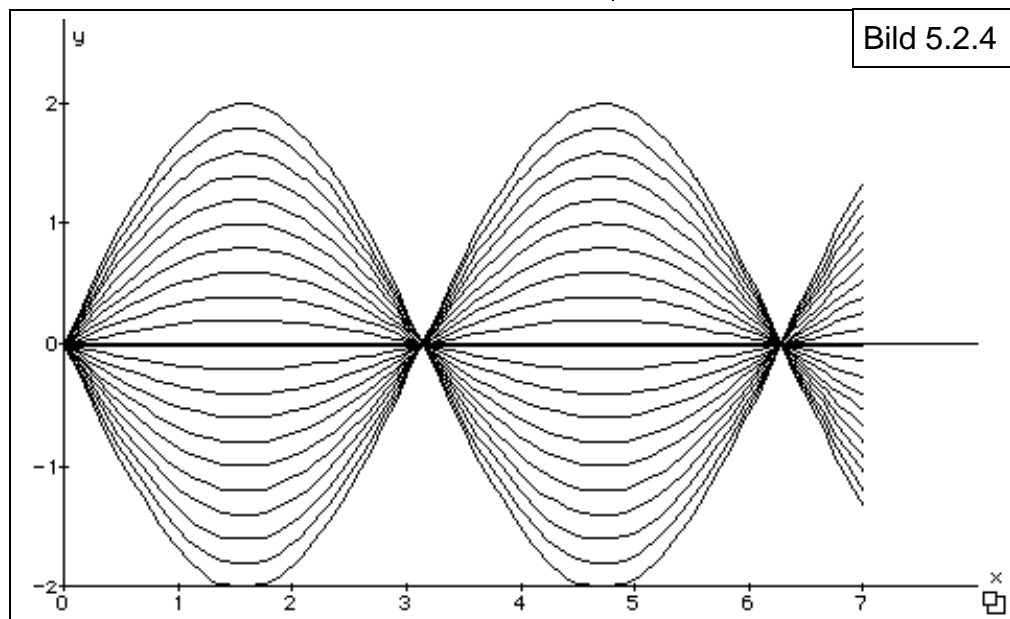
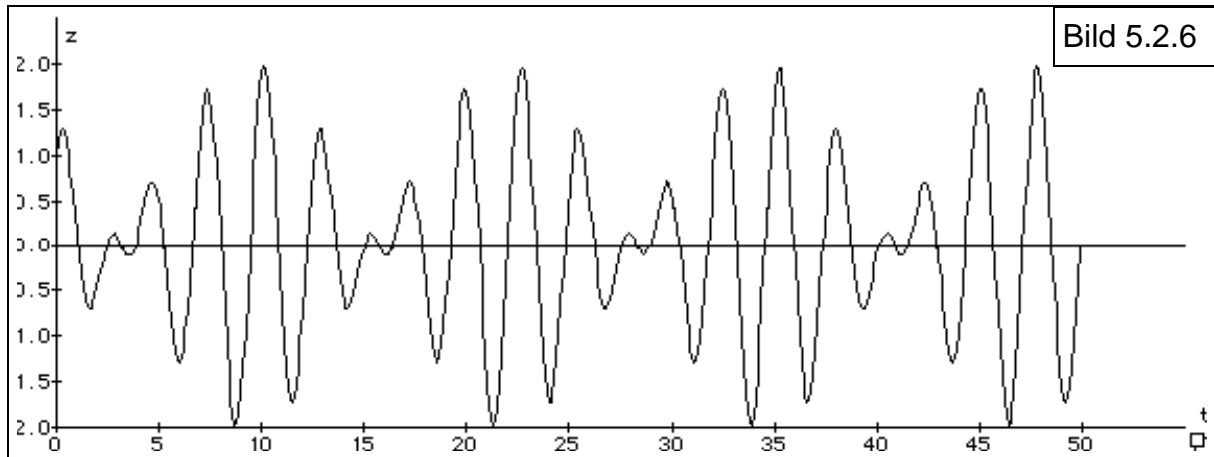


Bild 5.2.4



5.2.3 Aufgaben

1. Die Überlagerung im Bild 5.2.6 weist wiederum Regelmäßigkeiten auf. Welche Schwingungsdauern kannst Du in dem Bild erkennen?
2. Zeichne im Intervall von $[-2, 2]$ mit dem Funktionenplotter die Funktion \tan und die Funktion \arctan . Was ist zu beobachten?
3. Zeichne mit Hilfe einer Tabelle die Funktionenschar (Bild 5.2.7):

f1

$y = 0.5 \cdot x^2 + a \cdot x + 1$

Parameter: $a = -3, 3, 0.3$

1. Achse: $-6 \leq x \leq 6$

2. Achse: $-4 \leq y \leq 4$

Bild 5.2.7

Das Ergebnis sieht so aus (Bild 5.2.8)! Was für Merkwürdigkeiten sind zu sehen?

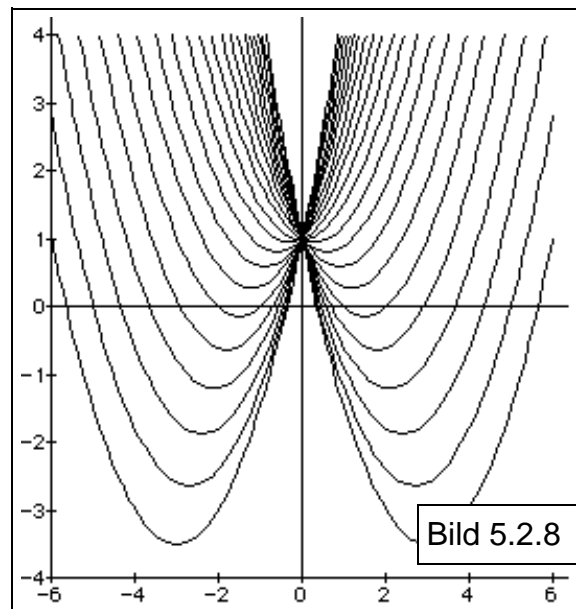


Bild 5.2.8

5.3 Elementare Rechnungen zu Wachstumsprozessen

5.3.1 Datenmengen, Darstellung, Auswertung

Beispiel Zinseszins

Ein Kapital K_0 trägt jedes Jahr Zinsen ein, die zum Zinsfuß p berechnet werden. Das neue Kapital K_{neu} errechnet sich aus $K_{\text{alt}} + \text{Zins}$, der Zins aus $K_{\text{alt}} \cdot p$, insgesamt also

$$K_{\text{neu}} = K_{\text{alt}} + \text{Zins} = K_{\text{alt}} + K_{\text{alt}} \cdot p = K_{\text{neu}}(1 + p).$$

Mit dieser Formulierung erschließen sich beispielsweise folgende Aufgaben:

Beispiel 1: Erstelle eine Tabelle für die Kapitalentwicklung für ein Startkapital von 100 DM, das 10 Jahre lang ohne Abhebung verzinst wird. Stelle Deine Tabelle in Form eines Säulendiagramms dar.

Beispiel 2: Die Kapitalentwicklung hängt sehr stark vom Zinsfuß p ab. Führe p als Variable ein und rechne die Tabelle für verschiedene p . p soll in Schritten von 1% von 2% bis 10% variiert werden.

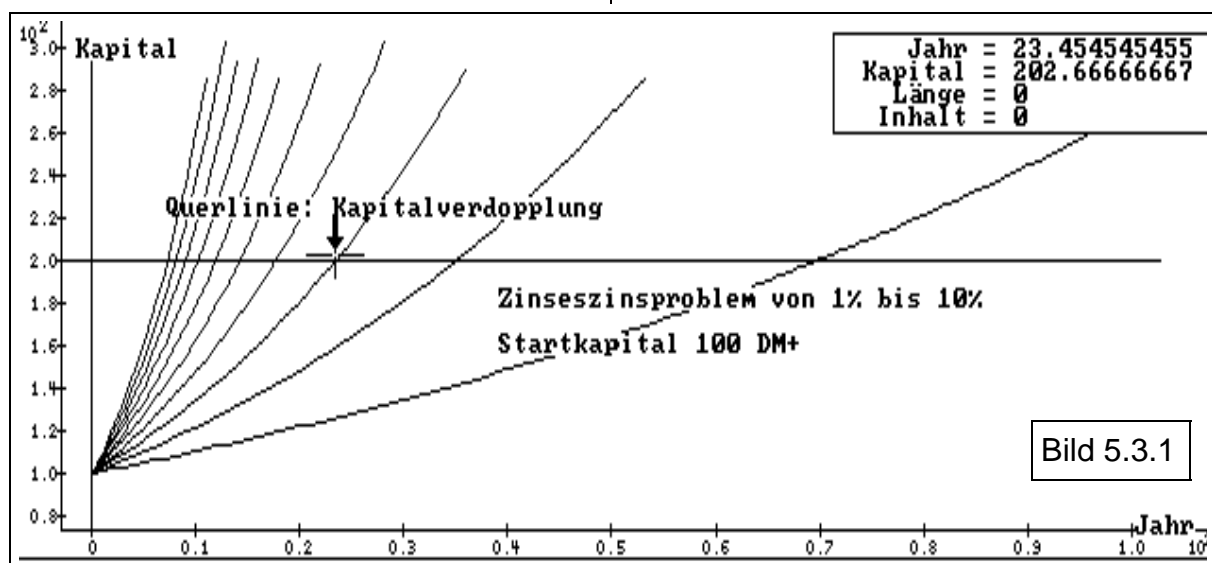
Beispiel 3: Eine interessante Tatsache ist die Kapitalverdopplung durch Zinseszins. Verwende die Lösung von Beispiel 2 zur Antwort! Wann hat sich das Kapital bei 3% Zins verdoppelt? Graphische Lösung zu Beispiel 3 (Bild 5.3.1).

Die Lösung von Beispiel 3 ist schon recht schwierig. In Vivitab wird zunächst folgendes Modell aufgebaut

$$\begin{aligned} \text{Jahr} &= \#\text{Jahr} + 1; \text{Jahr}(1) = 0 \\ p &= 0.01 \\ \text{Kapital} &= \#\text{Kapital}(1 + p); \\ \text{Kapital}(1) &= 100 \end{aligned}$$

Vor dem Durchrechnen der Tabelle wurde die Zeichenautomatik v eingestellt. Damit wird nach dem Durchrechnen automatisch der Graph eingetragen. Dann wird entweder von Hand ein neues p in die Tabelle eingetragen oder das ganze Durchrechnen mit Hilfe des Kommandos *Wiederholtes Rechnen* automatisiert.

Für die Lösung wurde noch im Funktionenplotter die konstante Funktion $\text{Kapital} = 200$ eingetragen. So läßt sich im großen Graphik-Fenster mit Hilfe des Cursors der Verdopplungszeitpunkt ablesen. Das Ergebnis ergibt sich dann



durch Aufrunden auf die nächst ganze Zahl.

5.3.2 Invertierte Fragestellungen:

Beispiel 3 war schon ein Beispiel für eine invertierte Fragestellung. Lösungen ergeben sich aus den Tabellen oder der Graphik. Für elegante geschlossene Lösungen wird immer die Kenntnis der Kehrfunktion vorausgesetzt. Diese ist nur in einfachen Fällen für die Schule greifbar. Für diese einfachen Fälle sind auch geschlossene Lösungen noch zu bestimmen.

Man geht von der Darstellung

$K_{\text{neu}} = K_{\text{alt}} + \text{Zins} = K_{\text{alt}} + K_{\text{alt}} \cdot p = K_{\text{neu}}(1 + p)$
 auf die für theoretische Zwecke besser geeignete $K_{n+1} = K_n(1 + p)$ über, mit der Möglichkeit zur expliziten Berechnung der Folgenterme durch $K_n = K_0(1 + p)^n$.

Allgemein formuliert führt Beispiel 3 zu folgendem Problem:

Beispiel 4: Gib für beliebige Zinsfüße p an, in welchem Zeitraum jeweils das Startkapital K_0 verdoppelt ist.

Es ergibt sich $2 \cdot K_0 = K_0(1 + p)^n$, und diese Gleichung muß nach n aufgelöst werden. Mit den Rechenregeln über das logarithmische Rechnen ergibt sich

$$n(p) = \frac{\log 2}{\log(1+p)}$$

Lösung zu Beispiel 4: Plot der Funktion $n(p)$ (Bild 5.3.2).

5.3.3 Probleme ohne einfachen analytischen Zugang

Beispiel 5: Felix Culpa benötigt einen Kredit von 10.000.- DM. Er wird pro Jahr 1000.- DM tilgen. Wie lange benötigt die Rückzahlung des Kredits für verschiedene Zinsfüße p .

Formulieren wir zuerst das mathematische Modell

$$\text{Jahr} = \# \text{Jahr} + 1; \text{Jahr}(1) = 0$$

$$p = 0.05$$

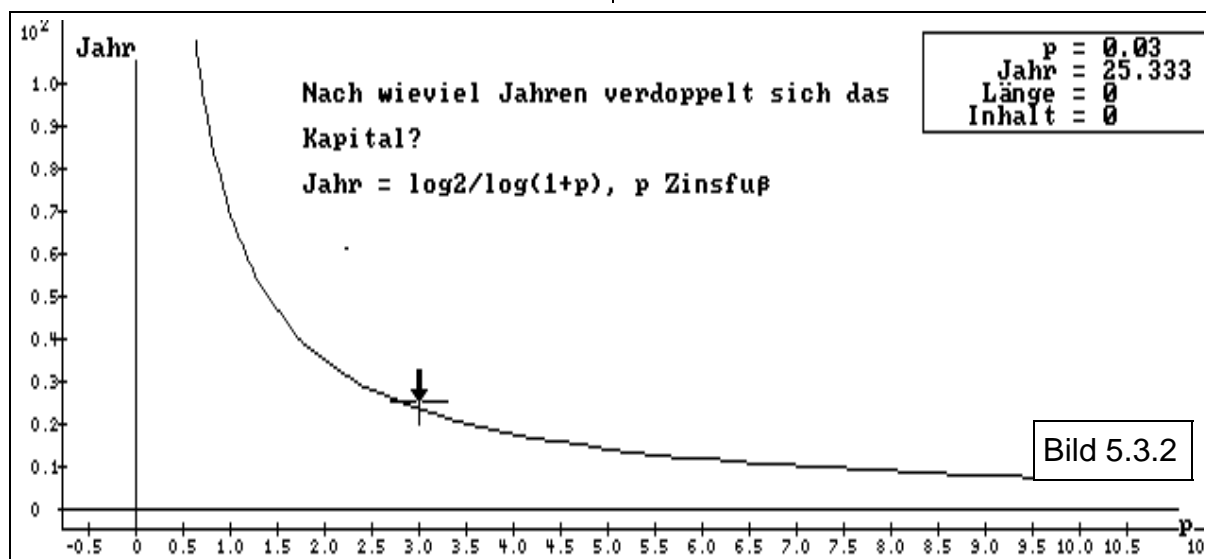
$$\text{Tilgung} = 1000$$

$$\text{Zins} = \# \text{Kapital} \cdot p$$

$$\text{Kapital} = \# \text{Kapital} \cdot (1 + p) - \text{Tilgung}$$

Die Tabelle (Bild 5.3.3) und die Graphik (Bild 5.3.4) ergeben, daß nach 14 Jahren noch ein kleiner Restbetrag offen ist, falls von der 10.000 DM Schuld jährlich nachschüssig 1.000 DM getilgt werden.

Formal handelt es sich um einen Spezialfall der Tilgungsgleichung, deren allgemeine Formulierung als Differenzengleichung 1. Ordnung mit konstantem Koeffizienten und konstanter



Inhomogenität

$x_{n+1} = a \cdot x_n + b$
lautet. Die

allgemeine

Diskussion

der Parameter a und b ,

wie sie bei

einer systematischen

mathematischen

Behandlung der

Gleichung

wünschenswert ist, ergibt

in dem gegebenen

textuellen Zusammenhang

keinen Sinn.

Beispiel 6:

Huberta Sorge

kann von Ihrem

30. Lebensjahr an

für das Alter im Jahr einen

Betrag von 1200.- DM zurücklegen. Sie

möchte mit 60 in Pension gehen und ab

dann jährlich einen Betrag von

6000.- DM zusätzlich zu Ihrer Rente zur

```

free memory: 188460 bytes
=====
n      Jahr      p      Tilgung      Kapital
30    :Jahr +1    0.05      1000          :Kapital*(1+
1      0          0.05      1000          10000.00
2      1          0.05      1000          9500.00
3      2          0.05      1000          8975.00
4      3          0.05      1000          8423.75
5      4          0.05      1000          7844.94
6      5          0.05      1000          7237.18
7      6          0.05      1000          6599.04
8      7          0.05      1000          5929.00
9      8          0.05      1000          5225.45
10     9          0.05      1000          4486.72
11    10         0.05      1000          3711.05
12    11         0.05      1000          2896.61
13    12         0.05      1000          2041.44
14    13         0.05      1000          1143.51
15    14         0.05      1000          200.68
=====
5.0000000000E-02      E:\
    
```

Bild 5.3.3

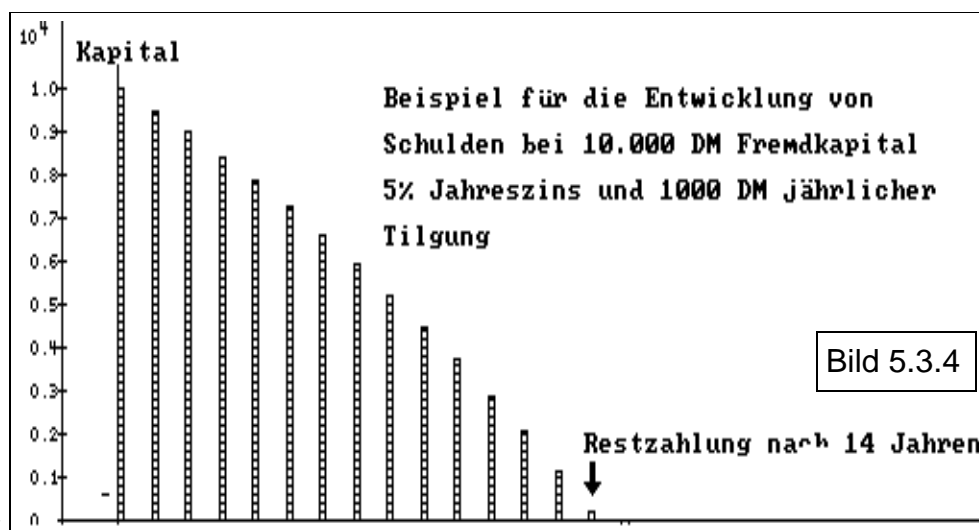


Bild 5.3.4

Verfügung haben. Bei welchen Zinsen läßt sich ihr Plan bis mindestens ins 80. Lebensjahr hinein erfüllen (Bild 5.3.5)?

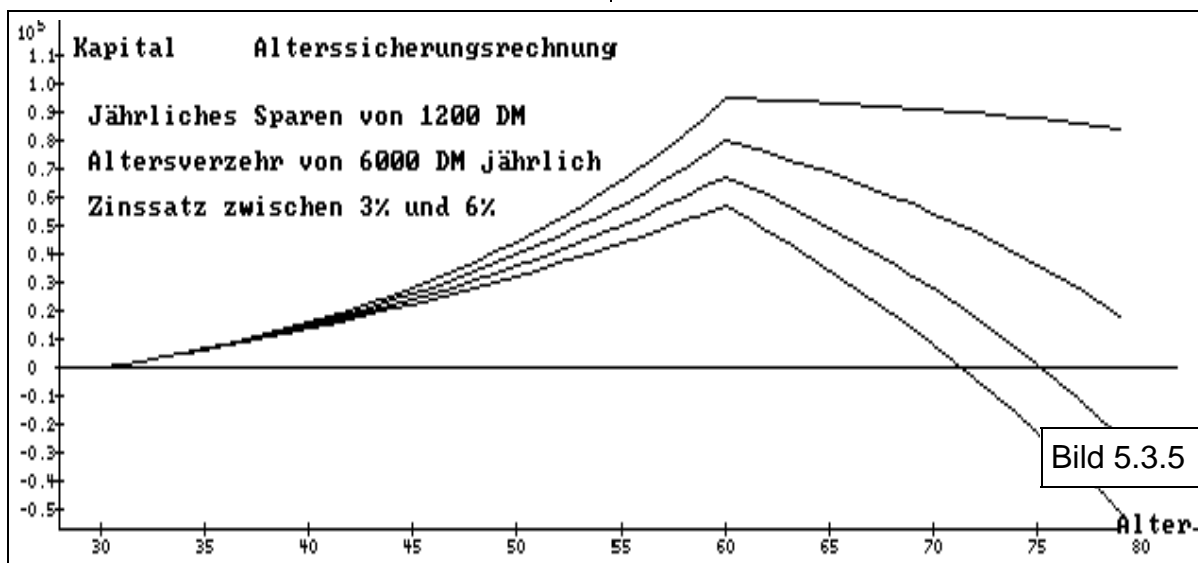


Bild 5.3.5

5.3.4 Beitrag zur Lösung der Invertierung des Wachstumsproblems: logarithmische Skalen

Beispiel: Das Jod-Isotop J131 ist radioaktiv. Seine Halbwertszeit T ist 8 Tage, d. h. von einer Ausgangsmenge N von radioaktiven Isotopen ist nach 8 Tagen die Hälfte zerfallen.

Nach der Reaktorkatastrophe von Tschernobyl ergab die Messung der Zerfälle an einer Grasprobe folgende Meßreihe:

Tage	1	2	3	4	5
Zerfälle	275	250	230	215	195
6	7	8	9	10	11
180	160	150	140	128	115

Aufgabe:

1. Trage die Meßwerte aus der Tabelle in einen Tage-Zerfälle-Graphen ein.
2. Erstelle eine Meßwerttabelle Tage-Log(Zerfälle) und trage diese in einen Graphen ein.
3. Der Graph aus Aufgabe 2 ergibt eine Gerade. Bestimme ihre Gleichung (Lösung: $-0.0373 \cdot \text{Tage} + 2.476$).
4. Welche Meßwerte erwartet man im folgenden bis zum 20. Tag? Berechne sie aus der Geradengleichung von Aufgabe 3 und geeigneter Umrechnung.

Lösungsmodell:

$\text{Tage} = \# \text{Tage} + 1; \text{Tage}(1) = 0$
 $\text{Meßwerte} = \text{DATEN}$
 $b = \log(\text{DATEN})$
 $\text{Regression} = \text{linreg}(\text{Tage}, b)$
 $\text{Gerade} = -0.0373 \cdot \text{Tage} + 2.476$
 $\text{Prognose} = 10^{\text{Gerade}}$

5.4 Parameterdarstellung von Kurven

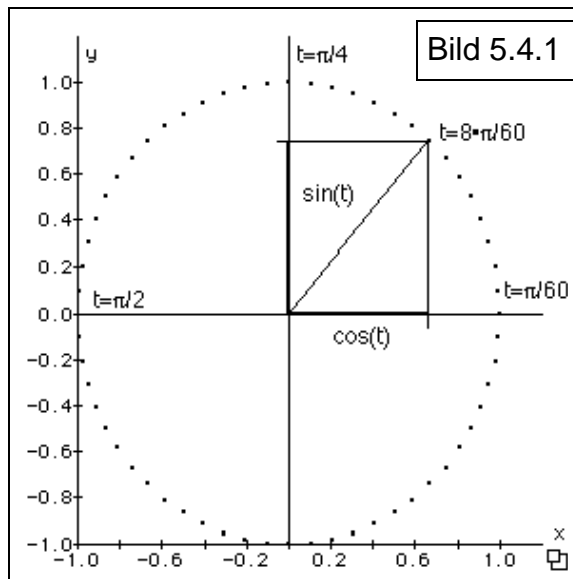
5.4.1 Kreis

Die Abbildungen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ sind zu unrecht aus der Betrachtung von Funktionen in der Schule verschwunden. Paradox ist, daß die Physik diese Abbildungen in Form von Bahnen bewegter Körper mit dem Parameter Zeit intensiv benötigt, die Mathematik jedoch diesen Service in einer mißverstandenen schulischen Tradition verweigert.

Bild 5.4.1 zeigt 60 Punkte auf einem Kreis, erzeugt durch

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]$$

Als Schrittweite wurde $dt = \frac{2\pi}{60}$ gewählt, so daß jeder Punkt erkennbar zu einem bestimmten Parameterwert gehört.

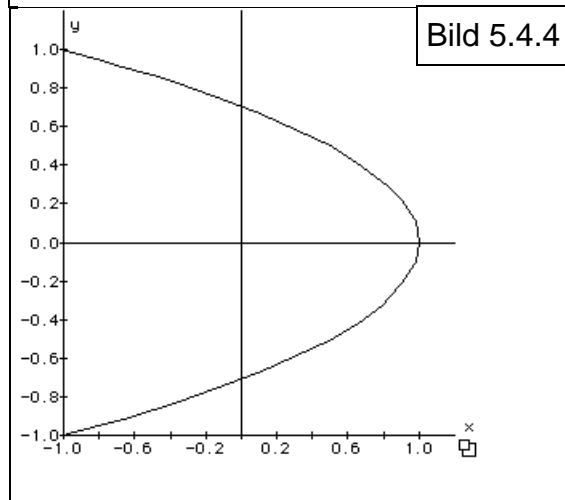
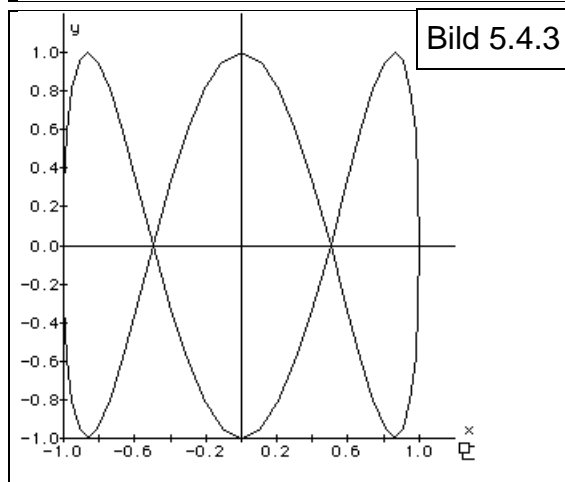
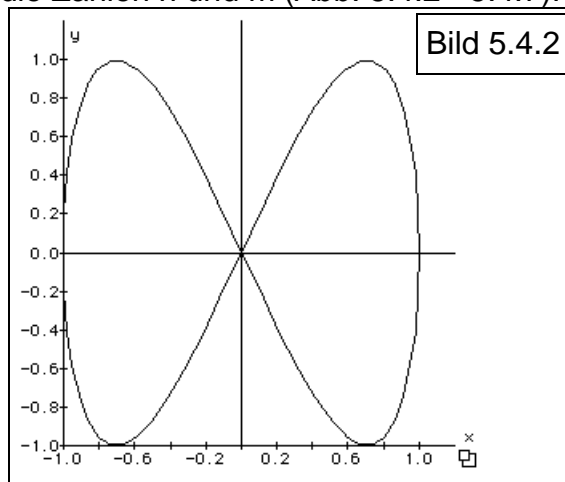


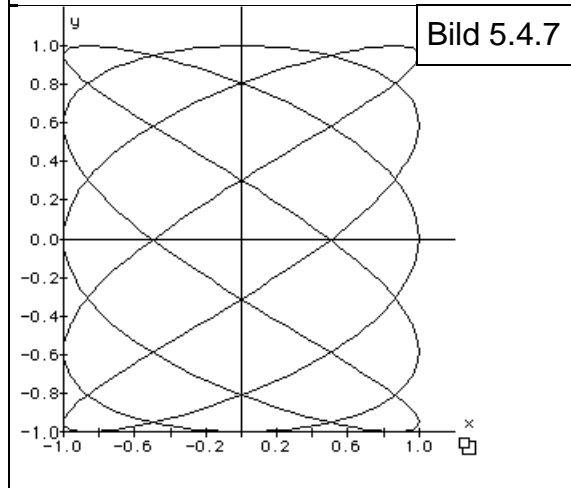
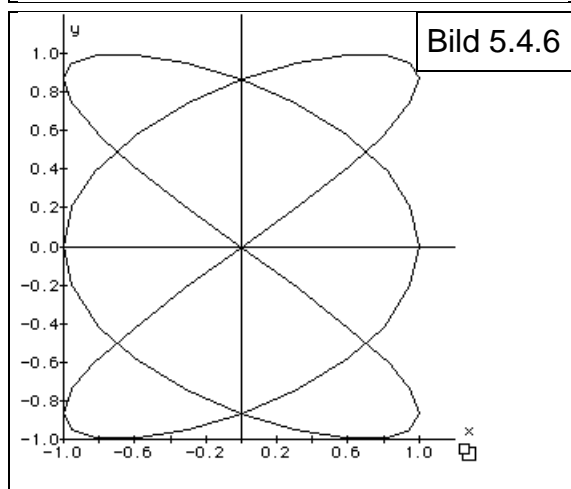
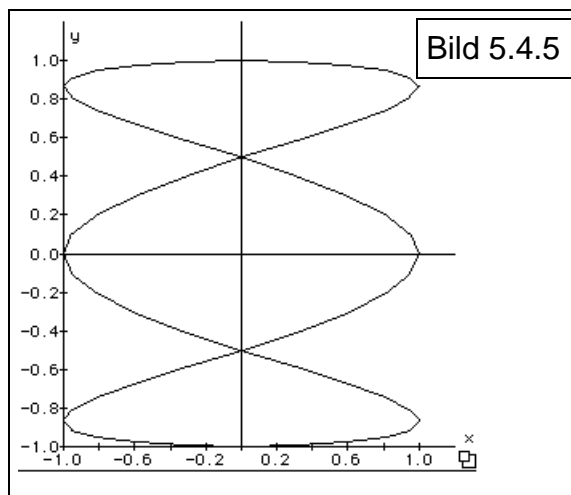
5.4.2 Lissajous-Figuren

Parametrisierte Kurven sind nicht so leicht zu durchschauen wie Abbildungen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} . Im folgenden sind Figuren angegeben, die aus

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(n \cdot t) \\ \sin(m \cdot t) \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi], n, m \in \mathbb{N}$$

entstanden sind. Bestimme für jede Figur die Zahlen n und m (Abb. 5.4.2 - 5.4.7)!





5.4.3 Eine exemplarische physikalische Anwendung

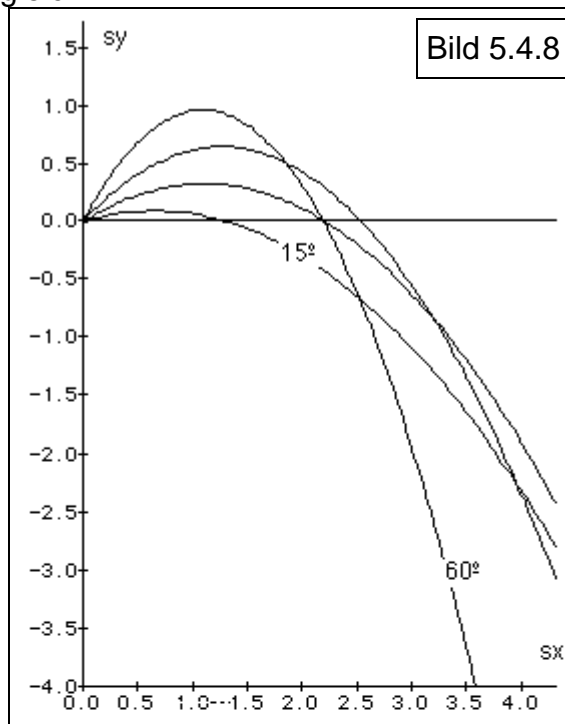
Die einfachste Bahnkurve ist die des schiefen Wurfes. Bei physikalisch sinnvollen Anfangsbedingungen ergibt sich eine Parabel mit 2 Nullstellen, also entsprechend einem Ansatz

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} t \\ a \cdot t \cdot (t - t_w) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

mit den Parametern t_w für die Wurfweite und a für die Lage des Scheitelpunkts.

Die einfachste iterative Lösung setzt lediglich die physikalischen Definitionen von Geschwindigkeit und Beschleunigung voraus. Das im folgenden gegebene Modell ist etwas raffinierter, weil in ihm die Anfangsbedingungen variiert werden können.

Die folgende Graphik (5.4.8) zeigt eine durch das physikalische Modell (Abb. 5.4.9) errechnete Parabelschar. Dabei wurde der Abwurfwinkel mit den Werten 15° , 30° , 45° und 60° variiert. Die Anfangsgeschwindigkeit blieb mit $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ gleich.



<code>n = 200</code>	<code>M O D E L L</code>	<code>Bild 5.4.9</code>
<code>ax = 0-:vx*R</code>		
<code>ay = -10+:vy*R</code>		
<code>Awinkel = 60</code>		
<code>Ageschw = 5</code>		
<code>vx = if(n>1, :vx+ax*dt, Ageschw*cos(Awinkel)); vx(1)=2.5</code>		
<code>vy = if(n>1, :vy+ay*dt, Ageschw*sin(Awinkel)); vy(1)=4.330127</code>		
<code>sx = :sx+vx*dt; sx(1)=0</code>		
<code>sy = :sy+vy*dt; sy(1)=0</code>		

Aufgaben:

1. Entnimm aus den Tabellen die Wurfweite und trage die Wurfweite gegen den Abwurfwinkel auf.
2. Entnimm aus den Tabelle die Scheitelpunkte der Flugbahnen
3. Versuche die Bahngleichungen für die Abwurfwinkel von 15° und 60° zu finden. Hinweis: Nimm aus den Tabellen die Nullstellen und variiere den Parameter a .

5.5 Elementares Näherungsverfahren zur maschinellen Berechnung von $\sin x$

Es soll ein Verfahren vorgestellt werden, mit dessen Hilfe es möglich ist, $\sin x$ für beliebige Argumente durch ein elementares, d. h. die abstrakte Grenzwertdefinition vermeidendes Verfahren zu approximieren.

5.5.1 Erläuterung des Verfahrens

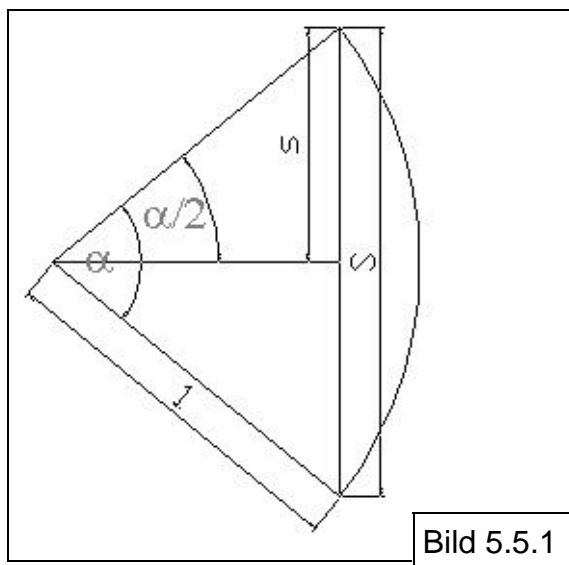


Bild 5.5.1

Die zum Bogen im Einheitskreis gehörige Sehne werde mit $S(\alpha)$ bezeichnet. Für den halben Bogen $x = \frac{\alpha}{2}$ gilt dann:
$$x = \frac{1}{2} S(\alpha).$$

Zu einem vorgegebenen Bogen x zerlegt man den doppelten Bogen α in 3^n ($n \in \mathbb{N}$) gleiche Teile. Die Teilbögen der Länge $\frac{\alpha}{3^n}$ approximieren mit wachsendem n die zugehörigen Sehnen $S(\frac{\alpha}{3^n})$ beliebig genau. Es gilt dann:

$$S\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) \approx \frac{\alpha}{3^n}.$$

Durch fortgesetzte Verdreifachung des Winkels $\frac{\alpha}{3^n}$ erhält man, von den

„kleinen“ Sehnen $S\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)$ ausgehend, in n Schritten die Länge der „großen“ Sehne $S(\alpha)$. Aus $S(\alpha)$ ergibt sich durch Halbieren unmittelbar der Näherungswert für $\sin x$. Entscheidend ist es nun, eine Formel zu finden, die es gestattet, aus einer zu einem beliebigen Bogen gehörigen vorgegebenen Sehne s die zum dreifachen Bogen gehörende Sehne S zu berechnen.

5.5.2 Beziehung zwischen den Sehnen s und S

Teilt man den Bogen α im Einheitskreis in drei gleiche Teile der Länge $\frac{\alpha}{3}$, so besteht zwischen den zugehörigen Sehnen $S = S(\alpha)$ und $s = S\left(\frac{\alpha}{3}\right)$ folgende Beziehung: $S = 3s - s^3$.

5.5.3 Beweis

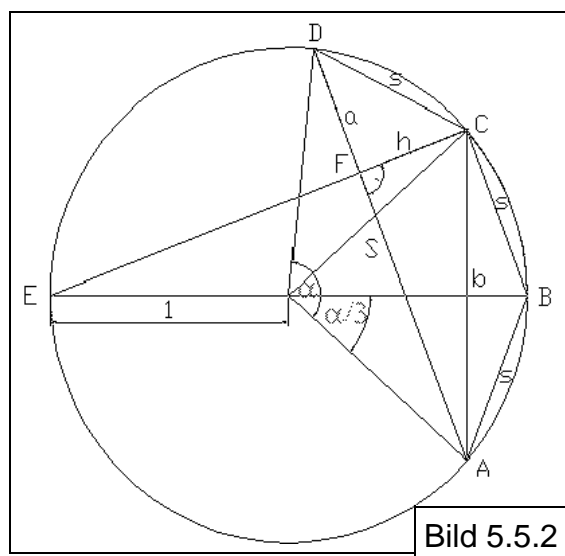


Bild 5.5.2

Im Dreieck CFD gilt:

$$h^2 = a^2 - s^2 \quad (I)$$

Im Dreieck ACF gilt:

$$b^2 = h^2 + (S - a)^2 \quad (II)$$

(I) in (II) eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} b^2 &= s^2 + (S - a)^2 - a^2 \\ b^2 &= s^2 + (S - a + a)(S - a - a) \\ b^2 &= s^2 + S(S - 2a) \\ b^2 &= s^2 + Ss \end{aligned} \quad (III)$$

Im Dreieck EBC gilt:

$\overline{EC}^2 = 4 - s^2 \Rightarrow \overline{EC} = \sqrt{4 - s^2}$. Berechnet man damit die Fläche des Dreiecks EBC mit $[EC]$ als Grundseite, so erhält man

$A = \frac{s \cdot \sqrt{4 - s^2}}{2}$. Wählt man $[EB]$ als Grundseite, so ergibt sich $A = \frac{b}{2}$. Durch Gleichsetzen erhält man dann:

$$b = s \cdot \sqrt{4 - s^2}. \quad (IV)$$

Gleichsetzen von (III) mit (IV) ergibt:

$(s \cdot \sqrt{4 - s^2})^2 = s^2 + Ss$ und nach Umformung: $S = 3s - s^3$.

5.5.4 Maschinelle Berechnung der Sinuswerte

Aus der obigen Beschreibung ergibt sich das Struktogramm, aus dem man leicht das zugehörige maschinenspezifische Programm in einer maschinen- oder problemorientierten Sprache erstellen kann.

Eingabe:	Winkel X , gewünschte Genauigkeit N	
Setze:	$A = 2 * X$ $S = A / 3^N$	
Wiederhole	Setze:	$S = 3 * S - S^3$ $N = N - 1$
bis $N = 0$		
Ausgabe:	$S/2$	

Dieses Verfahren ist auch für Winkel gültig, die größer als 2π sind. Da jedoch die Konvergenzgeschwindigkeit mit wachsendem Winkel abnimmt, ist es sinnvoll, die eingegebenen Winkel zuerst in die entsprechenden Winkel im 1. Quadranten umzurechnen und dann das Verfahren anzuwenden.

5.5.5 Schlußbemerkung

Die Formel $S = 3s - s^3$ kann auch als Sonderfall aus den Moivre-Formeln abgeleitet werden. Bei Teilung des Bogens α in m gleiche Teile besteht zwischen den Sehnen $S(\alpha)$ und $S(\frac{\alpha}{m})$ nach Moivre eine zu obiger Gleichung analoge Gleichung, die - wie man leicht nachrechnet - für ungerade m wurzelfrei ist und für $m = 3$ ihre einfachste Form, d. h. obige Gleichung annimmt.

Literatur: Mathematisches Experimentieren mit dem PC, A. Engel, Klett 1991

5.6 Flächenberechnung: Sehnen-Trapez-Verfahren

5.6.1 Aufgabe

Welches Maß hat die unter dem Graphen von $\sin^2(x)$ eingeschlossene Fläche (Bild 5.6.1)?

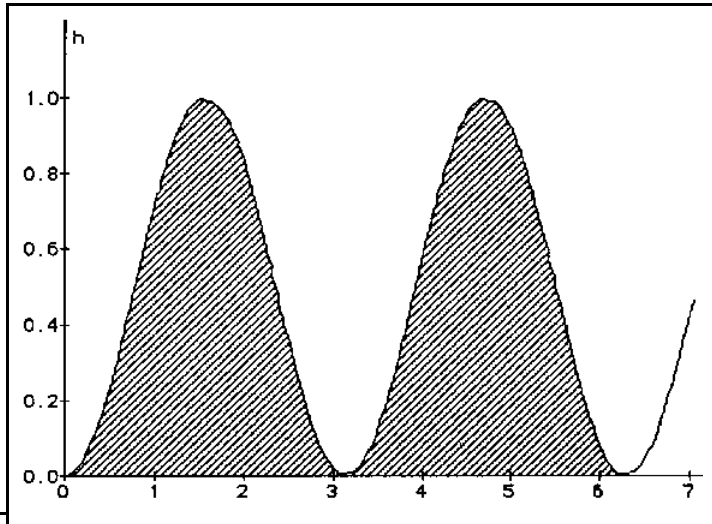


Bild 5.6.1

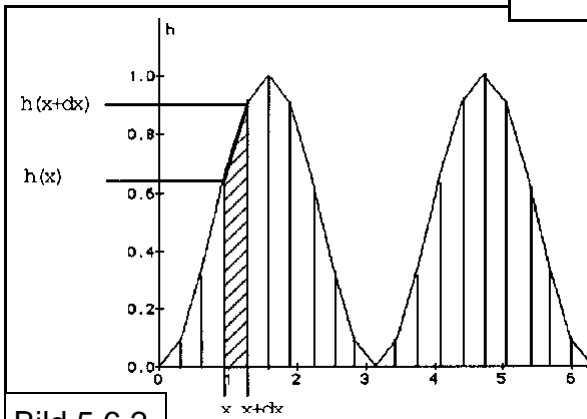


Bild 5.6.2

$$\frac{dx \cdot (h(x) + h(x+dx))}{2}$$

Die Summation einzelnen Sehnen-Trapez-Flächen ergibt eine Näherung der Gesamtfläche (Bild 5.6.3).

Schwierig ist das Problem nur dadurch, daß die Ränder der Fläche nicht geradlinig begrenzt sind. Wir wollen das Problem dadurch angehen, daß der Flächenrand durch einen Polygonzug genähert wird. Dann können wir mit der einfachen Trapezformel jede Teilfläche berechnen.

In Bild 5.6.2 ist mit einem 21eckigen Polygon die Funktion $\sin^2(x)$ genähert. Der Polygonzug entsteht durch eine Einteilung der Strecke $2 \cdot \pi$ in 20 gleiche Intervalle. Über jeder Intervallgrenze wird der Funktionswert berechnet und die so gefundenen Stützpunkte miteinander zum Polygonzug verbunden.

Sei $[x, x+dx]$ ein solches Intervall, dann errechnet sich das Sehnentrapez durch

Datei Rechnen Tabelle Ordnen Grafik Zi			
C:\DATEN\VIVITAB			
S : Bogenmaß			
V1: dx = 0.3141593;			
V2:			
Bezeichner: Fläche			
n	x	h	Fläche
20	#x+dx	sin(x)^2	(h+#h)/2*dx+
1	0	0	0
2	0.31415927	0.0954915055	0.0149997708
3	0.62831854	0.3454915116	0.0842692222
4	0.94247781	0.6545085104	0.2413488607
5	1.25663708	0.9045085081	0.4862386849
6	1.57079635	1	0.7853981862
7	1.88495562	0.9045084808	1.0845576832
8	2.19911489	0.6545084663	1.3294474963
9	2.51327416	0.3454914675	1.4865271209
10	2.82743343	0.0954914783	1.555796561
11	3.1415927	2.154197E-15	1.5707963276
12	3.45575197	0.0954915328	1.5857961027
13	3.76991124	0.3454915558	1.6550655653
14	4.08407051	0.6545085546	1.8121452176
15	4.39822978	0.9045085354	2.0570350531
16	4.71238905	1	2.3561945587
17	5.02654832	0.9045084535	2.6553540514
18	5.34070759	0.6545084222	2.9002438532
19	5.65486686	0.3454914234	3.0573234639
20	5.96902613	0.095491451	3.1265928929

Bild 5.6.3

5.6.2 Weitere Aufgaben

1. Eine Parabel ist durch die Funktionsgleichung $f(x) = x^2$ gegeben. Berechne durch die Summation von Sehnentrapezen die Fläche zwischen x -Achse und Parabelgraph im Bereich $[0;1]$.

2. Ein Halbkreis mit Radius $r = 1$ wird durch die Funktion $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ begrenzt. Berechne die Fläche der Sehnentrapeze für 4, 8 und 100 Intervalle! Was kann man für die Summe der Sehnentrapeze beobachten?

5.7 Zahlenfolgen: Darstellung am Computer

5.7.1 Tabelle und n-x-Graph

Aufgabe:

Welches Verhalten zeigt die Folge

(*) $x_1 = 1$

(**) $x_{n+1} = a \cdot x_n$

für die Werte $a = 1, -1, 0.9, -0.9, 1.5, -1.5$?

Lösung:

Zunächst macht man sich klar, was die Vorschriften in den Zeilen (*) und (**) bedeuten. Betrachten wir zunächst (**). Der Wert von x_{n+1} errechnet sich, indem man den Wert von x_n mit a multipliziert. Man könnte das auch so formulieren: $x_{neu} = a \cdot x_{alt}$. Und so kommt man von einem Wert zum andern.

Doch wie soll man anfangen? Dafür muß es einen Startwert geben. Er steht im Beispiel in Zeile (*) und ist 1.

Beispiel:

Für $a = 1.5$ ergeben sich die folgenden Zahlen: 1, 1.5, 2.25, 3.375, 5.0625, 7.59375 usw.

$a = 1.5;$		Darstellung der Zahlenfolge:
n	x	
1	1	In Vivitab läßt sich eine Zahlenfolge sehr einfach ausrechnen (Bild 5.7.1) und dann auch graphisch darstellen. In der Tabelle erkennt man die typische Syntax, die das Rechnen in Vivitab erfordert. Die Spalte wird durch den Folgen-
2	1.5	
3	2.25	
4	3.375	
5	5.0625	
6	7.59375	
7	11.390625	
8	17.0859375	
9	25.62890625	
10	38.443359375	
11	57.665039062	
12	86.497558593	

Bild 5.7.1

namen x überschrieben. Die Vorschrift, daß $x_{neu} = a \cdot x_{alt}$ gerechnet werden soll, wird als $a * \#x$ in die Zelle darunter eingetragen. $\#x$ heißt also, „nimm zum Rechnen den Wert der Vorgängerzelle“. In der Zelle neben $n = 1$ steht der Startwert. Er ist der Anker, von dem aus alle weiteren Werte berechnet werden.

In der Graphik stehen zwei Zahlenfolgen nebeneinander, nämlich n und x . Es bietet sich an, jeweils ein Paar nebeneinanderstehender Zahlen als Element einer Funktionentabelle zu sehen und in ein n - x -Koordinatensystem einzutragen. Im folgenden sind drei verschiedene Darstellungen der Folge gegeben: als Säulen (Bild 5.7.2), als Treppe (Bild 5.7.3) und als Punkte im n - x -Diagramm (Bild 5.7.4).

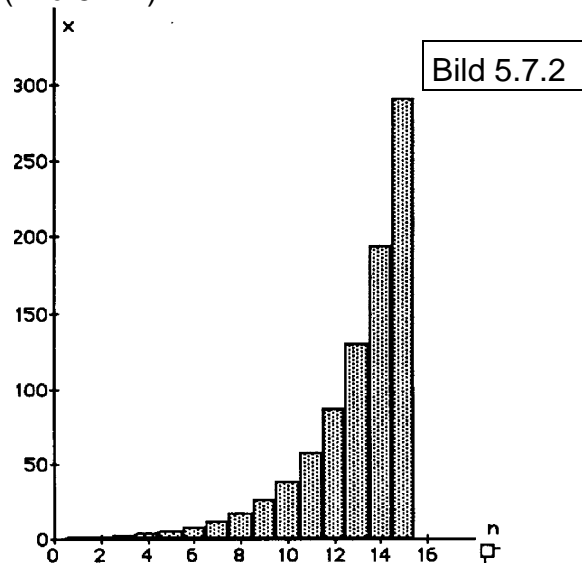


Bild 5.7.2

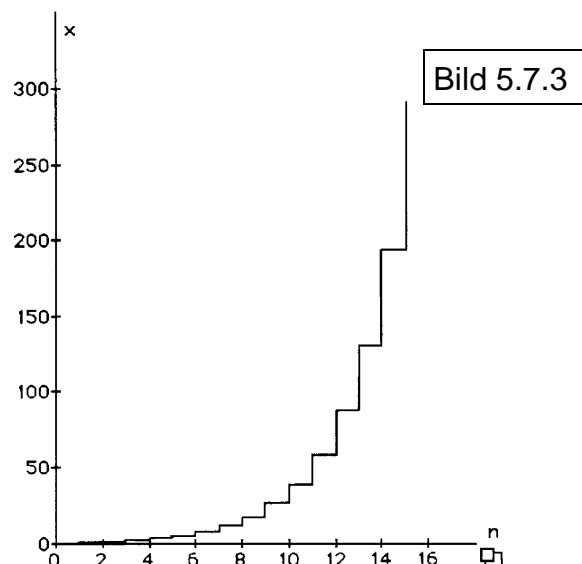


Bild 5.7.3

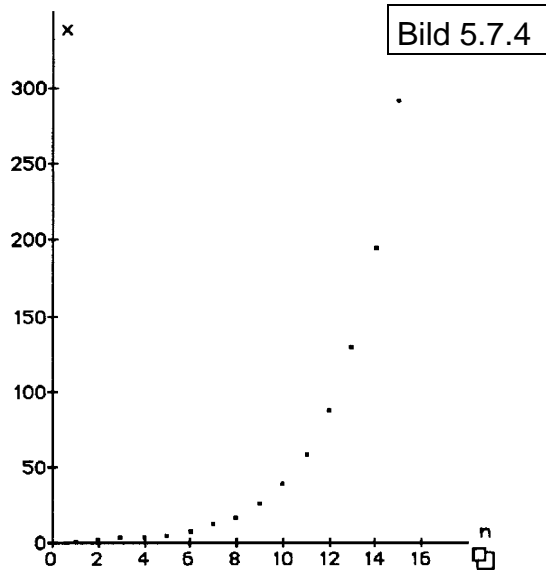


Bild 5.7.4

5.7.2 Darstellung im $x_{k+1}-x_k$ -Graph

Beispiel:

Stelle die Folge $x_{neu} = a \cdot x_{alt}$ mit $a = 0.9$ und Startwert 1 in der Tabelle in folgender Weise dar:

n	$x(k)$	$x(k+1)$
15	# $x(k+1)$	$a \cdot x(k)$
1	1	0.9
2	0.9	0.81
3	0.81	0.729
4	0.729	0.6561
5	0.6561	0.59049
6	0.59049	0.531441
7	0.531441	0.4782969
8	0.4782969	0.43046721
9	0.43046721	0.387420489
10	0.387420489	0.3486784401
11	0.3486784401	0.3138105961
12	0.3138105961	0.2824295365

Bild 5.7.5

Hier ist die Berechnung der Folge auf zwei Spalten verteilt. In der Spalte $x(k+1)$ wird gerechnet, in der Spalte $x(k)$ wird nur der berechnete Vorgängerwert übernommen. Sie wird nur für die graphische Darstellung benötigt.

In diesem Diagramm (Bild 5.7.6) sind die Tabellenwerte $x(k) - x(k+1)$ durch einen Treppengraphen miteinander verbunden. Man sieht sehr anschaulich,

wie die Funktionenfolge gegen den Ursprung konvergiert.

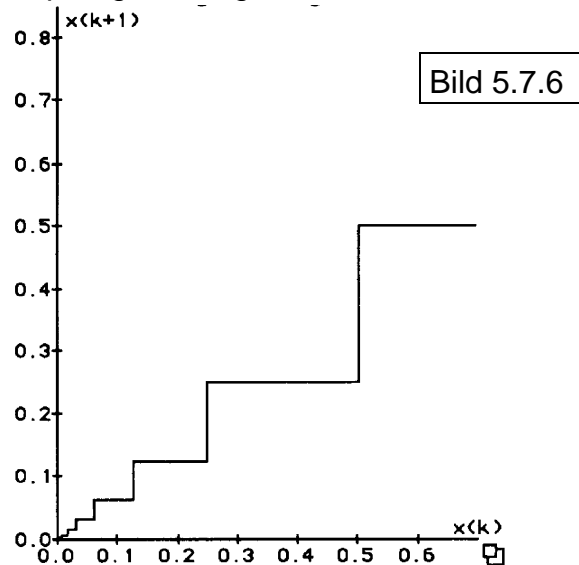


Bild 5.7.6

Aufgaben:

1. Erzeuge eine Tabelle für die Folge $x_{neu} = a \cdot x_{alt} + b$ mit $a = -0.9$ und $b = 0.5$. Gegen welche Zahl konvergiert die Folge?

2. Der folgende Graph gehört zu $a = -0.5$ und Startwert 2 (Bild 5.7.7). Versuche ihn zu erzeugen.

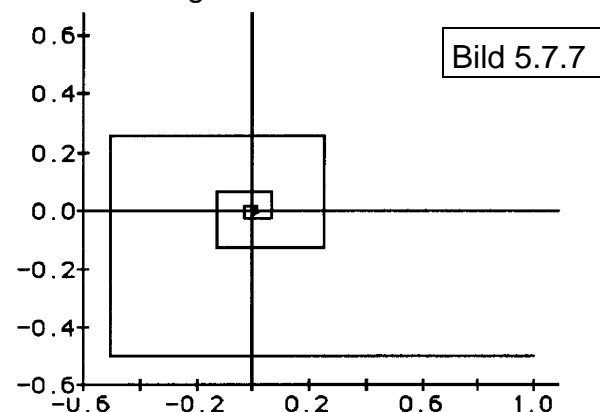


Bild 5.7.7

3. Erzeuge eine Folge nach folgender Vorschrift:

a) Wenn ein Folgenwert eine gerade Zahl ist, dann rechne $x_{neu} = x_{alt}/2$.

b) Wenn ein Folgenwert eine ungerade Zahl ist, dann rechne $x_{neu} = 3 \cdot x_{alt} + 1$.

Berechne die Folge mit unterschiedlichen ganzzahligen Startwerten. Es gibt ein merkwürdiges Ergebnis.

Hinweis zum Rechenterm:

$$y = \text{if}(\#y \bmod 2 = 0, \#y/2, 3*\#y+1).$$

5.7.3 Folgen ohne Häufungspunkt

Wir betrachten jetzt die Folge

$$x_{\text{neu}} = x_{\text{alt}} \cdot (a - x_{\text{alt}})$$

Zunächst sollen die ersten Teile der Folge von Hand berechnet und gezeichnet werden (Bild 5.7.8).

Wir zeichnen dazu die Iterationsfunktion für das gewählte $a = 2.9$, also

$y = x \cdot (2.9 - x)$, eine nach unten offene Normalparabel. Dann ermitteln wir graphisch den Funktionswert, der ja neues Folgenargument werden soll. Dies können wir geometrisch durch eine Spiegelung des Funktionswertes an der Winkelhalbierenden durchführen. Von dem so gefundenen neuen Punkt auf der x-Achse ermitteln wir wieder graphisch den Funktionswert. Diesen Graphenpunkt verbinden wir mit dem vorhergehenden zu einer Treppe. So entsteht dann sukzessive die im nächsten Bild angegebene Figur. Offensichtlich konvergiert für diesen Startwert die Folge gegen den Schnittpunkt der Parabel mit der Winkelhalbierenden (Bild 5.7.9).

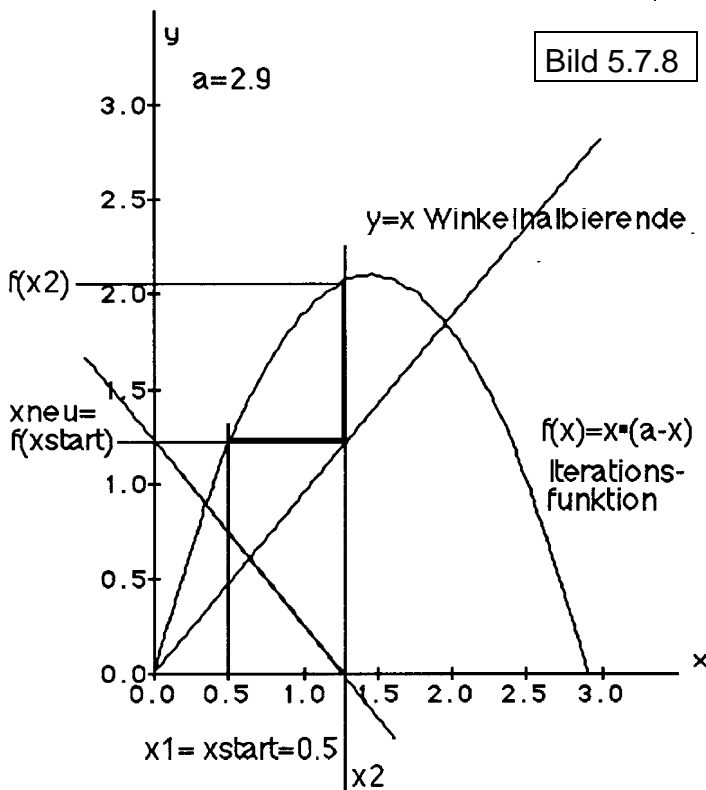


Bild 5.7.8

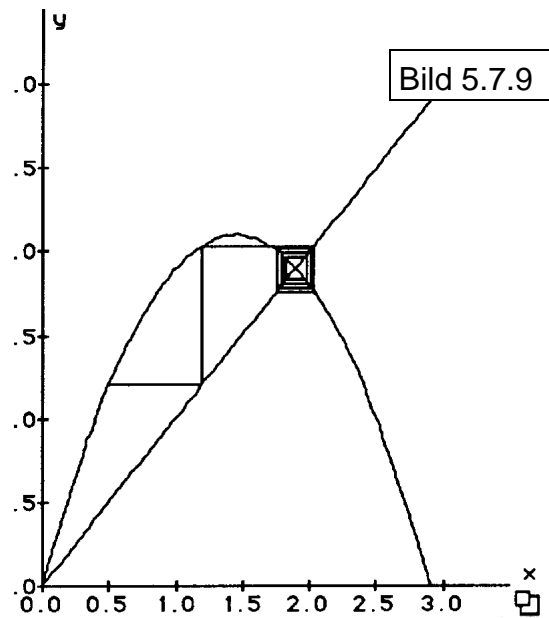


Bild 5.7.9

5.8 Die Intervallhalbierung: Ein universeller Algorithmus

5.8.1 Bestimmung von $\sqrt{2}$ durch Intervallhalbierung

Ausgehend von Ratezahlen ermittelt man für den Start ein Intervall, in dem $\sqrt{2}$ liegen muß, z. B. $[0; 2]$. Es gilt dann also

$$u := 0 < \sqrt{2} < o := 2.$$

Die weiteren Ratezahlen werden systematisch errechnet:

$$m := (u + o) / 2$$

und dann mit $m^2 > 2$ getestet, ob $u < \sqrt{2} \leq m < o$ gilt oder $u < m \leq \sqrt{2} < o$.

Bild 5.8.1

n	m	u	o	d
1		0	2	2
2	1	1	2	1
3	1.5	1	1.5	0.5
4	1.25	1.25	1.5	0.25
5	1.375	1.375	1.5	0.125
6	1.4375	1.375	1.4375	0.0625
7	1.40625	1.40625	1.4375	0.03125
8	1.421875	1.40625	1.421875	0.015625
9	1.4140625	1.4140625	1.421875	7.8125000e-3
10	1.41796875	1.4140625	1.41796875	3.9062500e-3
11	1.416015625	1.4140625	1.416015625	1.9531250e-3
12	1.4150390625	1.4140625	1.4150390625	9.7656250e-4
13	1.4145507812	1.4140625	1.4145507812	4.8828125e-4
14	1.4143066406	1.4140625	1.4143066406	2.4414062e-4
15	1.4141845703	1.4141845703	1.4143066406	1.2207031e-4

Im ersten Fall wird m die neue Obergrenze des Schätzintervalls, im zweiten Fall die neue Untergrenze des Schätzintervalls.

Durch dieses Verfahren entstehen die beiden Folgen u_n und o_n der Intervallränder durch den folgenden Algorithmus

$$m_{n+1} = \frac{u_n + o_n}{2}$$

$$u_{n+1} = \text{wenn}(m_{n+1}^2 < 2; m_{n+1}; u_n);$$

$$u_1 = 0$$

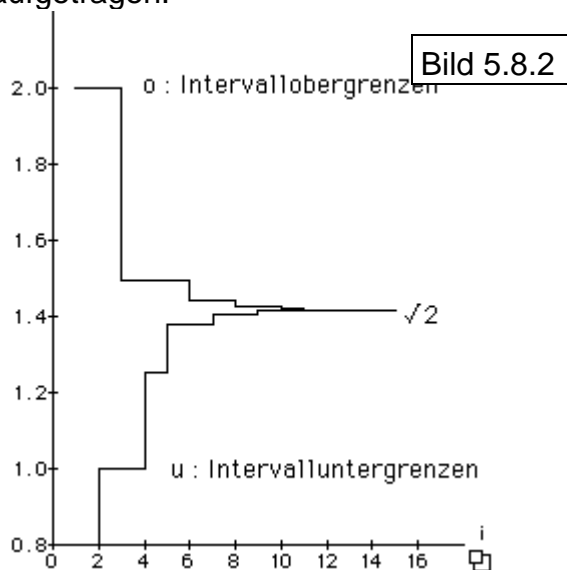
$$o_{n+1} = \text{wenn}(m_{n+1}^2 > 2; m_{n+1}; o_n);$$

$$o_1 = 2$$

$$d_{n+1} = o_{n+1} - u_{n+1}$$

Dieser Algorithmus berechnet die gesuchte $\sqrt{2}$ beliebig genau (Bild 5.8.1). Allerdings stößt man sehr rasch auf die Grenze der Rechengenauigkeit des Programms.

Die graphische Darstellung der Intervallschachtelung zeigt das nächste Bild (Bild 5.8.1). In Vivitab wurden nacheinander zunächst die Obergrenzenfolge o_n und dann die Untergrenzenfolge u_n gegen die Iterationszahl i aufgetragen.



Aufgaben:

1. Führe den Algorithmus durch, erstelle eine Tabelle. Trage in eine Graphik gegen die Iterationszahl n die Folgen u_n bzw. o_n auf.

2. Durch jede Iteration wird die Intervallbreite, auf die die Dezimalzahlentwicklung von $\sqrt{2}$ eingeschränkt wird, um die Hälfte kleiner. Entnimm der Tabelle, für welche Iteration der Fehler für $\sqrt{2}$ kleiner als $\frac{1}{100.000}$ ist.

3. Wieviele Iterationen braucht man, um das Intervall kleiner als $10^{-1.000.000}$ zu machen?

4. Kann Dein Rechner die Zahl $\sqrt{2}$ mit 1.000.000 Stellen hinter dem Komma überhaupt im Arbeitsspeicher darstellen?

5.8.2 Kann man den Algorithmus Intervallhalbierung zur Ermittlung der Nullstelle einer Funktion brauchen?

Wir betrachten die Funktion $\log(x)$. Die Graphik zeigt einen Ausschnitt des Funktionsgraphen im Bereich $-0.6 < x < 2$ und $-0.6 < y < 0.6$. Sie hat dort offensichtlich eine Nullstelle x . Aus dem Graph entnimmt man, daß die vorliegende Art von Nullstelle durch einen Vorzeichenwechsel der Funktion gekennzeichnet ist.

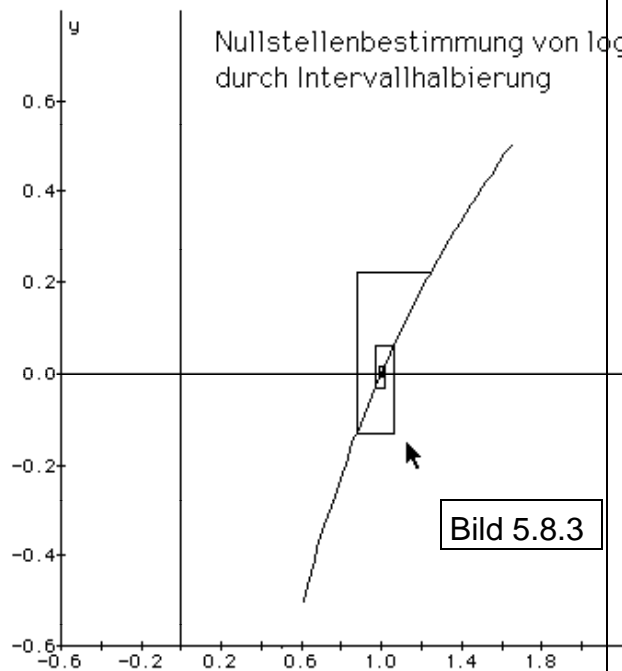


Bild 5.8.3

Wir definieren zunächst

$$\text{sgn}(f(x)) = \begin{cases} -1, & \text{wenn } f(x) < 0 \\ 1, & \text{wenn } f(x) > 0 \\ 0, & \text{wenn } f(x) = 0 \end{cases}$$

Dann versuchen wir den Algorithmus Intervallhalbierung anzuwenden. Z. B. ausgehend von den Startwerten 0.5 und

1.25, die so gewählt sind, daß die Nullstelle von $f(x)$ sicher in diesem Intervall liegt, berechnet man die Intervallmitte $m = \frac{0.5+1.25}{2}$ und dann den Testwert $t = \text{sgn}(f(m))$. Wenn t gleich dem Signum der Obergrenze ist, so wird m die neue Obergrenze, sonst die neue Untergrenze.

In der Notation von Vivitab ergibt sich z. B. folgende Darstellung des Algorithmus in allgemeiner Formulierung mit der Benutzerfunktion f und nebenstehend eine Zahlentabelle für die Näherung der Nullstelle (Bild 5.8.4):

u	o
if(t1=t2,m,:)	if(t1=t3,m,:)
0.5	2
0.5	1.25
0.875	1.25
0.875	1.0625
0.96875	1.0625
0.96875	1.015625
0.9921875	1.015625
0.9921875	1.00390625
0.998046875	1.00390625
0.998046875	1.0009765625
0.9995117188	1.0009765625
0.9995117188	1.0002441406
0.9998779297	1.0002441406
0.9998779297	1.0000610352
0.9999694824	1.0000610352

Bild 5.8.4

Algorithmus:

```

n = 15
m = (:u+:o)/2
y = f(m)
t1 = sgn(f(m))
t2 = sgn(f(:u))
t3 = sgn(f(:o))
u = if(t1=t2,m,:u); u(1)=0.5
o = if(t1=t3,m,:o); o(1)=2
    
```

Bild 5.8.5

Die Tabelle zeigt, daß die Lösung des Problems $\log(x) = 0$ bereits nach 15

Rechenschritten auf das Intervall $[0.9999694824; 1.0000610352]$ eingeschränkt ist.

5.8.3 Aufgaben

1. Ersetze die Funktion $f(x) = \log(x)$ durch $f(x) = x^2 + x - 2$ und berechne die Nullstellen dieser Funktion. Es müssen sich zwei Nullstellen errechnen lassen.

2. Berechne die Nullstellen der Funktion $f(x) = 0.2x^4 - x^3 - 2x^2 + 10x$. Es ergeben sich 4 Nullstellen. Bestimme sie genau durch Überlegung und indem du dem Graphen geeignete Startwerte entnimmst.

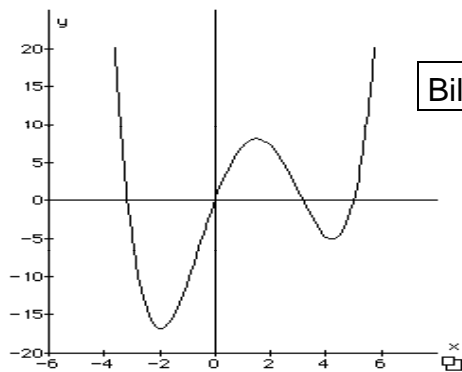


Bild 5.8.6

5.8.4 Anwendung auf ein anderes Problem: Ermittlung der Schnittstellen zweier Funktionen

Scheinbar handelt es sich um ein neues Problem: Ermittle die Schnittstelle der Funktionen $g(x) = x$ und $h(x) = \cos(x)$.

Das Problem $x = \cos(x)$ läßt sich nicht direkt rechnen und trotzdem überzeugt die Graphik (Bild 5.8.8), daß es eine Lösung gibt.

Die Lösungsidee ergibt sich aus der Bedingung $g(x) = h(x)$ für den Schnittpunkt x_s . Die Differenzfunktion $f(x) := g(x) - h(x)$ hat den Schnittpunkt x_s als Nullstelle.

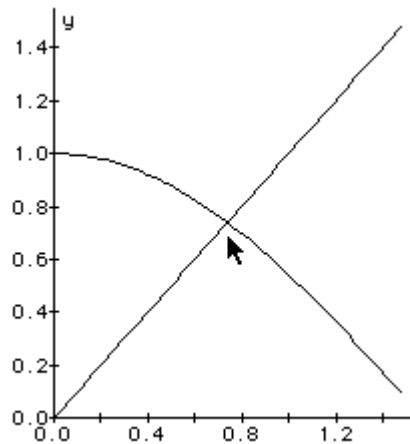


Bild 5.8.7

Das Beispiel zeigt $f(x) = \cos(x) - x$ und die Iteration der Intervallhalbierung zur Ermittlung der Nullstelle (Bild 5.8.8).

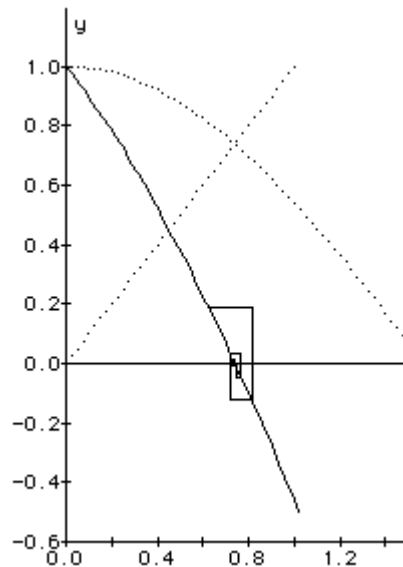


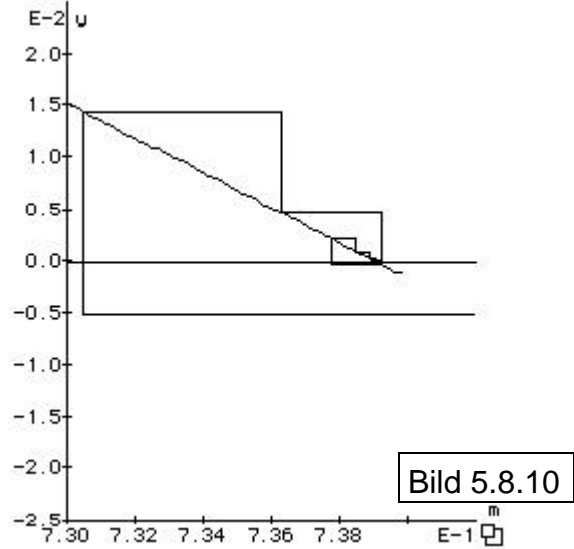
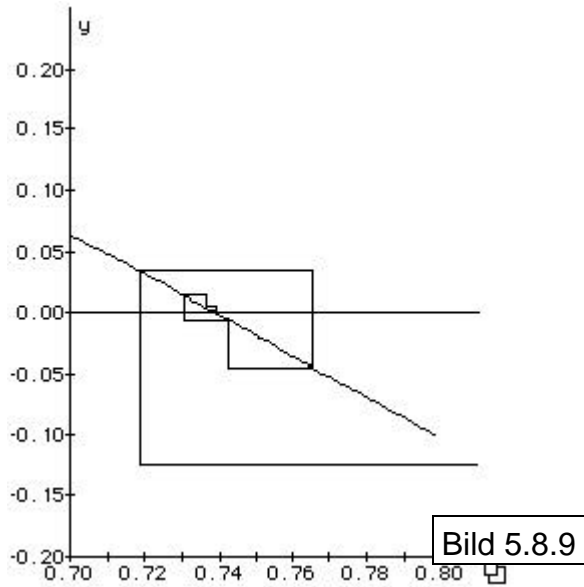
Bild 5.8.8

Für die Umsetzung auf einen Algorithmus benutzen wir einen wesentlichen Trick: Die benutzerdefinierte Funktion.

Man legt in einem Vereinbarungsteil fest, daß die Funktion $f(x) = x - \cos(x)$ sein soll. Mit dieser Funktion f kann man dann im Modellblatt arbeiten. Dadurch ergibt sich im Vergleich zum Absatz 1 gar keine neue Modellformulierung. Nur der Vereinbarungsteil muß verändert werden.

Es könnte noch reizvoll sein, der sich rasch verengenden Iterationsspirale nachzugehen. Das Bild 5.8.9 zeigt im

Zoom einen $\frac{1}{10}$ breiten, das Bild 5.8.10 einen nur noch $\frac{1}{100}$ breiten Ausschnitt des Graphen in der Umgebung der Nullstelle. Die folgenden beiden Graphen ergeben sich, wenn man aus der Tabelle den Funktionswert $y = f(m)$ gegen den Mittelwert m aufträgt und als Graphentyp die Treppe wählt.



5.9 Wurzelberechnung: Heronverfahren

5.9.1 Problem

Die Wurzel w einer Zahl z ist die positive reelle Zahl, deren Quadrat z ist. Berechne diese Zahl!

5.9.2 Lösung: Heron-Verfahren

x sei eine geratene Zahl, deren Quadrat nicht z ist. Also hat x einen bestimmten Abstand d von der gesuchten Wurzel. Es gilt also

$$(x + d)^2 = w$$

Durch Ausmultiplizieren ergibt sich

$$x^2 + 2dx + d^2 = w$$

Wenn wir in der Nähe der Lösung waren, ist d^2 kleiner als d und wir können annehmen, daß wir bereits mit $x^2 + 2dx$ nahe an w herankommen.

Aus $x^2 + 2dx = z$ folgt durch Umformung

$$d = \frac{(z - x^2)}{2x}$$

Es ergibt sich damit also für eine beliebige geratene Zahl x ein ungefährer Abstand zur gesuchten Wurzel.

Was liegt näher, als sich daraus einen neuen, besseren Ratewert zu errechnen:

$$d = x_{neu} - x_{alt} = (z - x_{alt}^2) / 2x_{alt}$$

also

$$x_{neu} = x_{alt} + \frac{(z - x_{alt}^2)}{2x_{alt}} = \frac{(x_{alt} + z/x_{alt})}{2}$$

5.9.3 Beispielrechnung

Gesucht sei Wurzel von 2. x_{start} sei 5. Dann ergibt sich

$d = (2 - 25)/10 = -2.3$ und damit Schätzung für den neuen Startwert

$$x_{neu} = x_{alt} - d = 5 - 2.3 = 2.7$$

Beispiel mit graphischer Umsetzung (Bild 5.9.1).

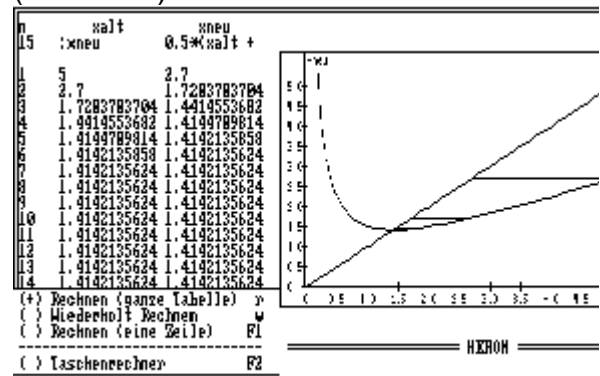


Bild 5.9.1

5.9.4 Fragen zum Problem

1. Funktioniert das Verfahren zur Berechnung von Wurzel 2 mit beliebigen Startwerten?

2. Berechne mit der Tabelle Wurzel aus 0.5 und stelle die Iteration graphisch dar.

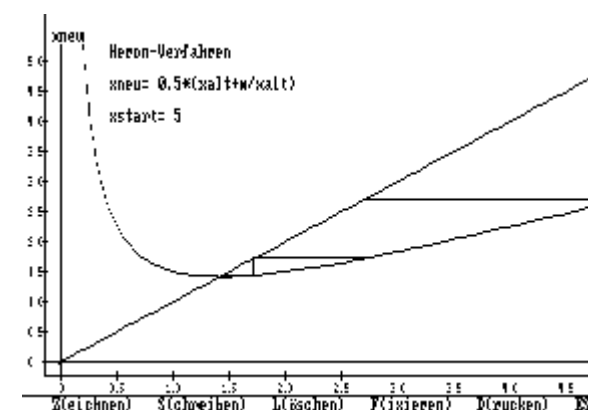


Bild 5.9.2

6 Geometrie

6.1 Geometrie am Bildschirm

Seitdem die Bildschirme grafikfähig wurden, stellt sich unüberhörbar der Wunsch, das auch für die Schule nützen zu können. Grafische Darstellungen von Funktionen, automatisch erzeugte Säulen- und Tortendiagramme sind weit verbreitet, wie steht es aber mit eigenen Zeichnungen, eigenem Konstruieren, mit Geometrie?

6.1.1 Malprogramme

Pixelgrafik in Paint-Programmen wird von den Schülern schon in der Unterstufe gern verwendet und in ganz kurzer Zeit allein oder von Mitschülern gelernt. Die Vorstellung, auf der Bildschirmoberfläche zu malen, auszuschneiden, verschieben und einzusetzen, ist offenbar so eingängig, daß kaum Anleitungen nötig sind. Die verschiedenen Werkzeuge, wie Pinsel oder Spraydose, Radiergummi, Muster und Schriften, erklären sich bei ihrer Verwendung von selbst. Und notfalls kann man bei schwierigen Partien die Pixel in passender Vergrößerung einzeln setzen oder löschen, bis man zufrieden ist. Raffiniertere Programme erlauben Farbverläufe, Überlagerung verschiedener Ebenen (Layer) und beliebig gebogene und verzerrte Schrift bis hin zu den Werkzeugen von Grafikern. Das ist eine reizvolle Einführung in den Gebrauch von Computer und Maus, aber keine Geometrie im Sinne der Mathematik oder der Schule.

6.1.2 Zeichenprogramme

Objektgrafik nach Art der Draw-Programme ist schwieriger zu verstehen und

zu erlernen. Daß ein einmal erzeugtes Rechteck seine definierenden Eigenschaften behält, selbst wenn man seine Größe und Lage ändert, daß eine Kreislinie zwar eine Punktmenge ist, andererseits aber durch Mittelpunkt und Radius vollständig bestimmt wird, entspricht sowohl dem Prozedurgedanken mit Eingangsparametern als auch dem Begriff der geometrischen Figur. Das Schwarz-Weiß der Zeichenfläche gliedert sich gedanklich in Strukturen, die als elementar betrachtet werden. Statt „Strichen“ verwenden wir nun „Linien“: Geraden, Kreise, Polygone. Und diese Bausteine lassen sich in jeweils anderer Gruppierung zu neuen Figuren zusammenbauen.

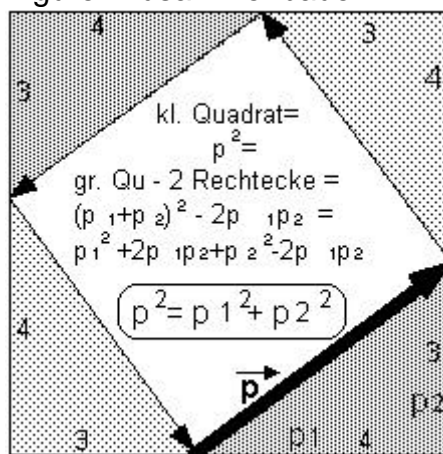


Bild 6.1.1

Die Arbeit mit solchen Programmen löst Denkprozesse aus. Wie bei der Primfaktorzerlegung wird ein lange bekanntes Ding plötzlich anders gesehen, neu verstanden, als Zusammensetzung von Komponenten, die in wechselnden Mischungen auftreten können.

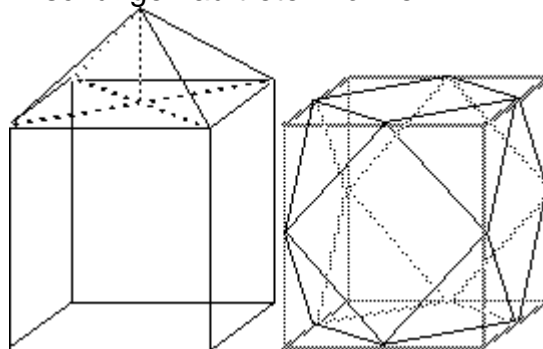


Bild 6.1.2

Wirkliche Geometrie ist auch das noch nicht. Dennoch können mit diesen Programmen Schüler (und Lehrer) Zeichnungen anfertigen, die denen im Geometriebuch vergleichbar sind. Geraden, Strecken, Rechtecke sind kein Problem. Parallelen lassen sich durch Verdoppeln erzeugen. Kreise sollte man außer durch zwei Ecken des Rahmenquadrats auch aus Mittelpunkt und einem Kreispunkt erzeugen können. Sehr wichtig ist die Möglichkeit, einen Kreisbogen zu zeichnen, wünschenswert ist ein Kreis durch drei Punkte.

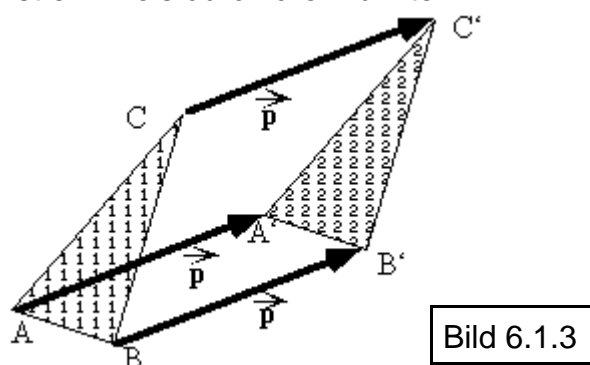


Bild 6.1.3

Lote, Winkel und Strecken lassen sich oft nur – ungeometrisch – näherungsweise finden durch die angezeigten Längen- und Winkelmaße. Für Punkte muß man die Kreuzchen selbst erzeugen. Polygone, sogar Kurven, gehören dagegen zum üblichen Figurenvorrat, ebenso Pfeile und verschiedenartig gestrichelte Linien.

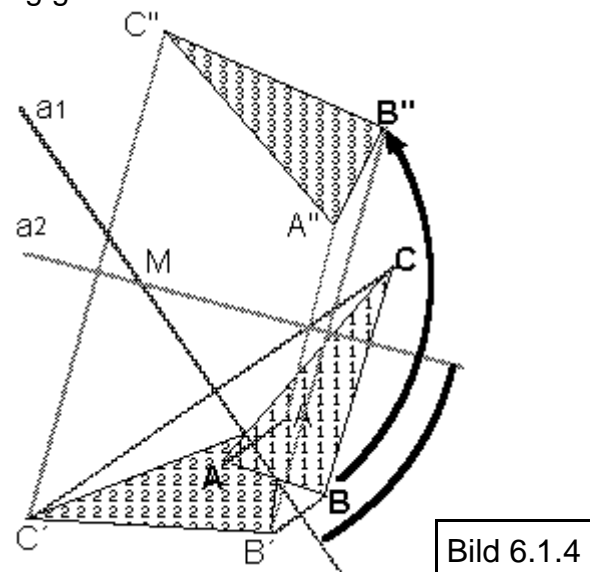


Bild 6.1.4

Am nützlichsten und lehrreichsten ist es, die erzeugten Elemente beliebig zu einer neuen Figur zusammenzufassen, diese Figuren wiederum als Elemente zu verwenden, aber solche Gruppierungen später auch wieder aufzulösen.

Die Möglichkeit, Figuren zu verzerren, Polygone zu glätten, Teile im Hintergrund anderer Figuren zu verbergen, Flächen mit Mustern zu füllen usw. führt schon wieder mehr in Richtung Pixelgrafik, also weg vom geometrischen Denken.

Dennoch: wenn auch der Begriff der Konstruktion nur in Ansätzen zu sehen ist, der Begriff der geometrischen Figur und ihrer Bausteine kann sich beim Umgang mit diesen Programmen recht gut entwickeln. Die Arbeit mit ihnen ist darum für Jahrgangsstufen 5 und 6 (evtl. noch 7) einerseits informationstechnische Grundbildung, andererseits eine gewisse Vorbereitung für den Geometrieunterricht. Der Umgang mit Zirkel und Geodreieck darf dabei natürlich nicht vergessen werden.

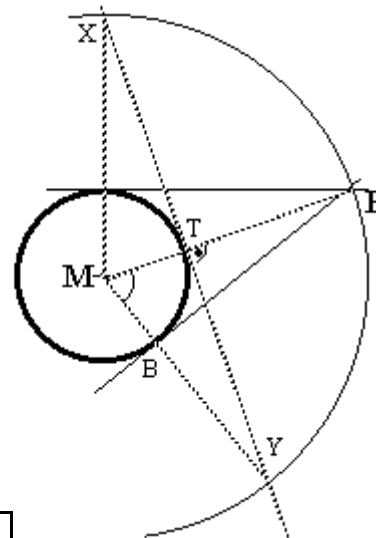
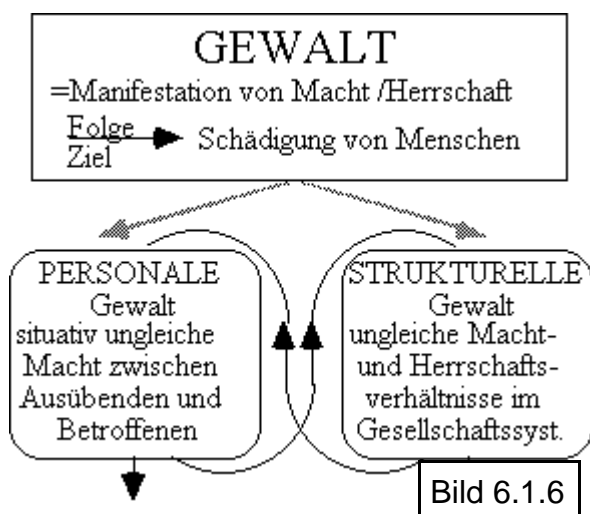


Bild 6.1.5

Vieles an den CAD-Programmen, die technische Zeichner verwenden, ist genau dasselbe: ein bequemes Hilfsmittel, um gute Zeichnungen zu bekommen, der Geometrie nahe, aber mehr dem

zeichnerischen Ergebnis verpflichtet als der Mathematik in seiner Erzeugung.

Außerdem lassen sich brauchbare Zeichnungen für Schulaufgaben, Arbeitsblätter und Folien erstellen. Selbst Germanisten, Religionslehrer und Historiker können oft mit rechteckigen Rahmen, mit Kreisen, mit Pfeilen und Verbindungslinien Zusammenhänge besser erklären als mit Worten allein (Bild 6.1.6).



6.1.3 Geometrieprogramme

Die ausdrücklich der Geometrie verpflichteten Programme können nach Kriterien beurteilt werden, zum Beispiel:

6.1.3.1 Lerngebiet

Die für den Lehrer zunächst wichtigste Frage ist die nach dem Themenbereich. Es gibt Spezialprogramme, die für ein bestimmtes Thema gedacht sind und Allgemeinprogramme, die eigentlich im ganzen Geometriebereich verwendet werden können.

6.1.3.2 Lernaufgabe

Ein bei beiden Typen erkennbares Merkmal ist das der Führung. Eher tutoriell gedachte Programme geben das Unterrichtsziel vor und führen den

Schüler mehr oder weniger deutlich zum erwünschten Ergebnis. Das können Programme sein, die bestimmte Aufgabentypen üben lassen, aber auch solche, die in einer Animation, vergleichbar einem Trickfilm, den Konstruktionsgang vorspielen, evtl. auch als Demonstration des Lehrers an der Großbildprojektion.

Die mehr erkundend angelegten Programme geben das Ziel wenig oder gar nicht vor. Sie erlauben dem Schüler, im Umgang mit den Dingen Erfahrungen zu sammeln, die dann abstrahierend in Erkenntnissen zusammengefaßt werden können. Oft können diese Programme gar keine Erfolgsmeldung geben, sondern müssen es dem Schüler überlassen, seine eigene Arbeit zu beurteilen. Dem Experimentieren wird viel Raum gegeben, der Möglichkeit, Fehler zu machen, natürlich auch.

6.1.3.3 Sprache

Da wir in der Geometrie im Gegensatz zur Algebra (noch?) keine standardisierte Sprache haben, ist es schwierig, eine korrekte, maschinengerechte Syntax mit einer schülernahen Semantik zu verbinden und dabei die Verbindung zum Unterricht und zum Schulbuch nicht zu verbauen. Eine Möglichkeit ist, die Objekte einfach wortlos mit Maus oder Pfeiltasten auf dem Bildschirm zu zeichnen. Schwieriger wird es bei Interpretationen wie Strecke-Gerade oder mehrfachen Schnittpunkten. Der übliche Verzicht auf eine Orientierung von Geraden und Strecken wirkt sich hier nachteilig aus.

Eine zweite Möglichkeit sind exakte Konstruktionsanweisungen in der Art einer Programmiersprache, deren Regeln aber natürlich kein Selbstzweck sein können. Der Lernaufwand muß in

sinnvoller Relation zum Gesamtunterricht stehen.

6.1.3.4 Benutzerfreundlichkeit

Gerade um die Lernzeit nicht dem Programm zu widmen, sondern der Geometrie, muß die Bedienung den Schülern sehr entgegenkommen. Dazu gehören etwa der Aufruf von Befehlen sowohl über das Menü als auch über Tasten, Eingaben mit der Maus oder Pfeiltasten oder durch Koordinaten, eine erlaubte Abkürzung der Befehlswoorte, ein Polymorphismus, der z. B. neben $kr(M;r)$ ebenso versteht $kr(M;A)$, ein bequemes Editieren in der Befehlsliste, eine leichte Änderung von Beschriftungen bzw. sichtbaren und unsichtbaren Linien, sowie Online-Help und differenzierte Fehlermeldungen.

6.1.3.5 Aufbaumöglichkeit

Da gerade der Geometrieunterricht bei aller Großzügigkeit in der Ausdrucksweise doch das modulare Denken sehr fördert, weil er viele Konstruktionen im Schatz der „Grundkonstruktionen“ sammelt, sollte sich ein Geometrieprogramm ebenfalls durch Definition von Makros bzw. durch Einsetzen von Termen, geometrischen und algebraischen, erweitern lassen (etwa $k1 := kr(AB \ll g; r1+r2)$). Soweit Abbildungen verwendet werden, müßte man auch eigene Figuren als Grundobjekte definieren können. Entsprechend lokalen Variablen sollte nicht jedes Hilfsobjekt benannt werden müssen (aber z. B. über einen interne Nummer erreichbar sein).

Zur Ausbaubarkeit gehört andererseits die Konfigurierbarkeit, die es dem Lehrer gestattet, seinen Schülern ganz bestimmte Grundkonstruktionen, Menus und Basisfiguren zur Verfügung zu stellen.

6.1.3.6 Leistungsfähigkeit

Grundsätzlich ist die Leistungsfähigkeit eines Programmes an dem zu messen, wozu es gedacht war. Je nach dem können Beschränkungen leicht hinzunehmen sein oder schmerzlich; Vielfalt kann erfreulich sein oder verwirrend. Ganz allgemein wäre abzuwägen: die Anpassung an verschiedene Rechner bzw. Grafikkarten, Drucker oder Plotter, die Einstellung eines „Kreises“ als Kreis, der Stricharten und Farben bzw. der Grautöne. Zu prüfen ist die Brauchbarkeit von Ausdrucken, die Darstellung am Datendisplay und die Weiterbearbeitung der Zeichnung in diesem oder in anderen Programmen.

Kriterien sind die wiederholte Abrufbarkeit von Einzelschritten, die nachträgliche Abänderung der Figur schrittweise oder stufenlos, die Schnelligkeit des Bildaufbaus, die Animation oder der Vergleich mehrerer Figuren und der Übergang von der Konstruktion zum Text oder sogar zur Begründung. Auch die Ein- bzw. Ausgabe von Zahlenwerten als Koordinaten, Längen, Winkeln und Flächen kann wertvoll sein. Mitgelieferte Makros sind hilfreich, besonders wenn sie als Muster für eigene Entwicklungen zur Verfügung stehen. Bei manchen Programmen läßt sich auch ahnen, in welcher Richtung zukünftige Versionen wohl bereichert werden.

6.1.4 Spezialprogramme

Die für ein bestimmtes Thema entworfenen Programme enthalten die geometrischen Voraussetzungen in sich; der Benutzer wird mit ihnen nicht belastet. Mit den vorgesehenen Objekten kann er aber frei experimentieren. Die Programme POLYEDER, KUGEL, ABBILDEN werden in eigenen Beiträgen kurz beschrieben. Andere Beispiele sind: D-SPIEGEL (G. Kühlewind) für die

Zweifachspiegelung eines Dreiecks an parallelen oder sich schneidenden Achsen und „DREIECKE“ (K. D. Hein) für Dreieckskonstruktionen aus Seiten Winkeln und Höhen.

6.1.5 Allgemeinprogramme

Allgemeine Geometrieprogramme erwarten vom Benutzer eigene Konstruktionsarbeit. Wie mit Zirkel und Lineal bzw. Geodreieck muß er aus gegebenen Stücken die gesuchte Figur erzeugen. Im Gegensatz zum bisherigen Geometrieunterricht wird aber automatisch der Konstruktionsgang Schritt für Schritt gespeichert. Eine Veränderung der Ausgangsstücke führt deshalb von selbst zu einer entsprechenden Veränderung der Ergebnisfigur. So läßt sich die einmal ausgeführte Konstruktion experimentell durchspielen. Sonderfälle, Grenzlagen, Abhängigkeiten, die man früher nur im Gedankenexperiment verfolgte, werden offen sichtbar.

Unterschiedlich sind die methodischen Vorstellungen, was also man dem Benutzer erlaubt und was man von ihm fordert,

wie weit man an die Schulbuchgeometrie anknüpft und welche neuen Möglichkeiten man zuläßt.

„Geometrie-Puzzler“ (R. Roseeu) für Atari-ST bleibt verhältnismäßig eng am herkömmlichen Geometrieunterricht der Jahrgangsstufen 7 bis 9. Neben den üblichen Grundkonstruktionen sind auch z. B. Kreis durch 3 Punkte, Teilpunkt einer Strecke oder Faßkreisbogenpaar direkt abrufbar. Bei den Abbildungen werden Änderungen am Original oder der Abbildung sofort sichtbar. Geometrische Örter werden mit Pfeilen für ihre invariante Eigenschaft schrittweise vorgeführt.

Drei PC-Programme, die neue, experimentelle Zugänge öffnen, werden in eigenen Beiträgen vorgestellt: „CABRI Géomètre“ (Kap. 6.2 und 6.3), das z. Zt. vielseitigste und brauchbarste Programm, ferner „GEOLOG“ (Kap. 6.4) und „KONSTR“ (Kap. 6.5).

6.2 Cabri Géomètre

6.2.1 Allgemeines

Cabri Géomètre (Prof. Laborde, Universität Grenoble, seit 1988, in C geschrieben, Macintosh und MS-DOS) erlaubt als zur Zeit bestes Programm, konstruktiv und experimentell auf dem Bildschirm ebene Geometrie zu treiben. Die weitere Entwicklung ist noch im Gange. (Lit. H.Schumann, Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer, Metzler + Teubner, Stuttgart 1991)

Cabri erlaubt mit Maus bzw. Pfeiltasten und einfachem Menüsystem ebene Konstruktionen direkt auf dem Bildschirm auszuführen. Im Gegensatz zu Zeichenprogrammen bleiben die mathematischen Zusammenhänge erhalten, so daß eine Änderung der gegebenen Stücke sofort eine Änderung der ganzen Figur bewirkt. Man kann also – und das ist die große Stärke von Cabri – viele der möglichen Figuren zur selben Gesetzmäßigkeit sehen, ohne sie jedesmal neu konstruieren zu müssen.

Diese (im Rahmen der Bildschirmauflösung) stetige Veränderung von Figuren bietet ganz neue didaktische Möglichkeiten.

6.2.2 Konstruktion

Aus Grundobjekten Punkt, Strecke, Gerade, Kreis, Dreieck lassen sich mit Grundkonstruktionen wie Mittelpunkt, Mittelsenkrechte, Lot, Parallele usw. neue Objekte konstruieren. Die Zeichnung wird auf Wunsch vergrößert oder verkleinert dargestellt. Auch an einem Gitternetz kann man sich orientieren. Koordinateneingabe ist nicht nötig, aber auch nicht möglich. Fallen mehrere Objekte aufeinander („mehrdeutig“),

kann in einem kleinen Fenster das gewünschte ausgewählt werden.

6.2.3 Figuren Erforschen

Eine einmal konstruierte Figur läßt sich durch einfaches Ziehen mit der Maus an den Punkten (sog. Zug-Modus) in verschiedenen Varianten darstellen. Insbesondere lassen sich rasch Sonderfälle und Grenzfälle erkennen und die Fallunterscheidung für die Normalfälle angeben. Durch „Bindung an“ eine Gerade oder einen Kreis läßt sich die Beweglichkeit von Punkten einschränken. Solche Bindungen lassen sich auch nachträglich festsetzen oder wieder aufheben.

6.2.4 Zusammenhang Erraten

Schüler versuchen bei unbekanntem Konstruktionen oft, durch Halbieren oder Abtragen irgendwelcher Strecken und Winkel auf Ergebnisse zu kommen, die dem Auge richtig erscheinen. Ob die Idee wirklich richtig ist, ist meist schwer zu sehen, die Antwort des Lehrers „so geht es nicht“ erweckt den Eindruck von Macht, überzeugt aber kaum. Mit Cabri läßt sich die vermutete Lösung bei geänderter Figur beobachten. Schnell sieht man es, wenn sie falsch ist. Scheint sie bei allen Lagen zu passen, dürfte sie wohl richtig sein, muß aber natürlich noch begründet werden: das Experiment motiviert die mathematische Arbeit.

6.2.5 Beweisfiguren

Für Beweise von Lehrsätzen pflegt man – schon aus Zeitgründen – stets nur eine einzige Beweisfigur zu zeichnen. An ihr erkennt und begründet man gleiche Strecken, kongruente Dreiecke, rechte Winkel usw. Der Lehrer betrachtet diese Figur als repräsentativ für alle anderen, die die Voraussetzungen ebenfalls

erfüllen würden. Schüler sehen aber nur diese eine Figur, glauben, der Beweis gelte nur für sie, und zweifeln deshalb oft an der Beweisbedürftigkeit, wo man es doch „sieht“ oder wenigstens „nachmessen“ könnte. Mit Cabri läßt sich die Beweisfigur unter Einhaltung der Voraussetzungen verändern. Nun wird sichtbar, daß sich z. B. die Länge zweier Strecken ändert, aber dennoch stets beide gleich lang sind. Ändert man die Figur entgegen den Voraussetzungen, gilt meist auch die Behauptung nicht mehr. Die Allgemeingültigkeit eines Beweises und die Bedeutung der Voraussetzung werden nun auch für die weniger rasch abstrahierenden Schüler deutlich.

6.2.6 Messungen

Manche Behauptungen sind mit dem Augenmaß nur schwer zu überprüfen. Cabri bietet die Möglichkeit, für Strecken, Winkel und Flächen die Maßzahlen in die Zeichnung einzusetzen. Bei Veränderung der Figur ändern sie sich laufend mit. So werden Vermutungen widerlegt oder erhärtet. Auch Maxima oder Minima lassen sich aufspüren (z. B. isoperimetrisches Problem). Die Stellenzahl der Maßangaben kann in den Voreinstellungen geändert werden. Ihre sprunghafte, atomistische Veränderung wird natürlich bald bemerkt und muß erklärt werden. Es sind also doch nicht unendlich viele Figuren, die wir sehen können, aber eine große Anzahl.

6.2.7 Objektdarstellung

Punkte, Geraden, Kreise lassen sich jeweils farbig, fett oder dünn darstellen oder (als Hilfslinie) ganz ausblenden. Die Objekte lassen sich beliebig mit Namen (bis zu 4 Zeichen) benennen, wobei die Namen wie die Maßzahlen in der Nähe des Objekts plaziert werden können.

6.2.8 Ortslinien

Als besonderen Leckerbissen erlaubt es Cabri, die Bewegung eines Punktes zu verfolgen, der von einem anderen abhängt. Bewegt man diesen – frei oder auf einer bestimmten Geraden oder einem Kreis –, so durchläuft jener eine Bahn, die punktweise als Ortslinie auf dem Bildschirm erscheint. Auch die Bahnen mehrerer abhängiger Punkte zugleich lassen sich (Umschalttaste) darstellen. Manchmal lohnt es sich sogar, die Bahn eines Punktes „abhängig von sich selbst“ aufzuzeichnen, z. B. wenn man zahlenmäßig gleiche Umfangswinkel oder Abstandsverhältnisse abtastet.

Die Ortslinie läßt sich in dieser Version von Cabri nicht als eigenes Objekt weiterverwenden; korrekte Ellipsen oder Konstruktionen mit Hilfe von Parabeln oder höheren Kurven sind also nicht möglich. Aber sie läßt sich Punkt für Punkt in ihrer Entstehung und als Gesamtkurve darstellen. Damit sind Ortsaufgaben der Art: „Wo bewegt sich Punkt P, wenn ...“, die bisher der analytischen Geometrie vorbehalten waren, auch ohne Rechnung zu bewältigen.

6.2.9 Textbeschreibung

Auf Wunsch läßt sich eine Konstruktionsbeschreibung abrufen, die alle Konstruktionsschritte wiedergibt, wobei die vom Benutzer verwendeten Namen verwendet werden. Wo der Benutzer keine Namen gab, werden Punkte, Geraden, Kreise durchnummeriert.

6.2.10 Rückblende

Jederzeit läßt sich der bisherige Konstruktionsgang auch zeichnerisch Schritt um Schritt abrufen, wobei ein kurzer Text jeweils angibt, was geschehen ist.

6.2.11 Eigenschaft

Vermutungen der Art: „Punkt liegt auf“ , „sind parallel“ oder „sind gleich lang“ werden vom Programm aufgrund der Konstruktion als allgemein richtig oder falsch beantwortet. Was nur in der momentanen Figur richtig aussieht, wird durch eine kleine Veränderung der Zeichnung widerlegt. Auch dies kann falsche Vermutungen widerlegen, richtige erhärten und zur Begründung auffordern.

6.2.12 Makros

Die zweite große Stärke von Cabri ist die Möglichkeit, jede einmal ausgeführte Konstruktion als Makro, als neue Fundamentalkonstruktion zu definieren. Man muß nur auf die Ausgangsstücke zeigen, dann auf die gewünschten Ergebnisobjekte, dem Makro einen Namen geben und evtl. einen Hilfetext vorsehen. Das Makro wird gespeichert, kann in Zukunft geöffnet und dann als einfaches Verfahren verwendet werden. So lassen sich selbst komplizierte Konstruktionen unter ihrem Namen aufrufen. Zeit, Hilfslinien, Nachdenken und Irrtümer erspart man sich. Mit einem geeigneten Satz von Makros gewinnt die konstruktive Geometrie deutlich höheres Niveau.

6.2.13 Lernumgebung

In Cabri lassen sich Figuren abspeichern, die man für die Weiterarbeit genau so wieder öffnen kann. Makro-Konstruktionen lassen sich ebenfalls zur Verfügung stellen. Umgekehrt kann man das Menü einschränken auf bestimmte Befehle und Konstruktionen. So läßt sich eine Lernumgebung schaffen, die auf einen bestimmten Wissensstand zugeschnitten ist und Überflüssiges vermeidet. Leider läßt sich ein Gesamtpaket von Menü, Makros und Figur (noch) nicht festlegen.

6.2.14 Wünsche

Eine Reihe von mehr oder weniger großen Wünschen an das Programm bleibt (zunächst) offen. Zum kleineren Teil betreffen sie die Menügestaltung: Platz für eigene Makros, Beendigung einer Tätigkeit, Fehlermeldungen. Zum Teil betreffen sie die Gestaltung von Zeichnungen „wie im Buch“, also mit Stücken von Geraden, Kreisbogen, gestrichelten und punktierten Linien, Kombination mehrerer Figuren auf einem Blatt. Zum Teil betreffen sie Dinge, die in der Geometrie bisher nicht geklärt, sondern von Fall zu Fall aus der Anschauung entschieden wurden: „wähle einen beliebigen Punkt auf“, „der“ Schnittpunkt der beiden Kreise, „die“ Winkelhalbierende.

Zum Teil sind sie auch in der Mehrdeutigkeit der bisherigen Ausdrucksweise begründet. So unterscheiden wir zwar 2 Punkte, Strecke, Halbgerade, Gerade, nehmen uns aber die Freiheit, selbstverständlich von der Strecke zu ihrer Verlängerung überzugehen, ohne erst noch einmal eigens eine Gerade „erzeugen“ zu müssen, wenn wir z. B. das Lot von einer Dreiecksecke auf die Gegenseite fällen. Wir orientieren üblicherweise Geraden nicht und entscheiden im Einzelfall, wohin eine Strecke oder ein Winkel anzutragen ist. Hier fehlt manchmal noch die goldene Lösung zwischen korrekter Umständlichkeit und salopper Mißverständlichkeit.

6.2.15 Beispiele

Die Beispiele sind als kopierfähige Arbeitsblätter (DIN A5) angelegt. Wo es sinnvoll ist, wurden sie in eine obere und untere Hälfte aufgeteilt, wobei meistens die obere dem Experimentieren, die untere der Ergebnissicherung gewidmet ist. Falls es zweckmäßig erscheint, kann der Lehrer auch schon die Figur

vorbereiten, speichern, und sie von den Schülern nur abrufen und bearbeiten lassen.

6.2.15.1 Kurzanleitung

In einer DIN A5-Seite sind die wichtigsten Möglichkeiten für die MS-DOS-Version zusammengefaßt.

6.2.15.2 Entfernung von Geradenpunkten

Geeignet zur Einführung in das Arbeiten mit Cabri. Abstand $d(P,g)$ ist die kürzeste Entfernung zu einem Geradenpunkt, also das Lot.

6.2.15.3 Winkel an Geradenkreuzung

Geeignet zur Einführung in das Arbeiten mit Cabri. Nebenwinkel und Scheitelwinkel werden durch Ausmessen erforscht.

6.2.15.4 Winkel an Doppelkreuzung

Geeignet zur Einführung in das Arbeiten mit Cabri. Parallelität als die Eigenschaft, mit einer dritten Geraden stets gleiche Stufenwinkel zu bilden. Eigenschaften der Nachbarwinkel und Wechselwinkel an parallelen Geraden.

6.2.15.5 Z-Winkel, Winkel im Dreieck

Ein Makro „Winkelantragen“ muß zur Verfügung stehen. Gleiche Wechselwinkel ergeben stets parallele Geraden. Die Winkelsumme im Dreieck und im n-Eck.

6.2.15.6 Spiegelung (Schrift)

Mit Hilfe der Ortskurven-Erzeugung wird aus einer Schrift die Spiegelschrift bei Achsen-, Punkt- und drei Fällen von Doppelspiegelung.

6.2.15.7 Spiegelung

Das Makro „Habakopf“ muß zur Verfügung stehen. Am Männchen werden die Eigenschaften der Achsen- und Punktspiegelung erforscht. Verschiedene Achsen- oder Zentrumslagen können ausprobiert werden.

6.2.15.8 Doppelspiegelung

Das Makro „Habakopf“ muß zur Verfügung stehen. Am Männchen werden die Eigenschaften der Doppelspiegelung an zueinander parallelen oder sich schneidenden Achsen erforscht. Die Reihenfolge der Achsen kann auch getauscht werden.

6.2.15.9 Streckung

Die Makros „Habakopf“ und „Strecken P“ müssen zur Verfügung stehen. Am Männchen werden die Eigenschaften der zentrischen Streckung erforscht. Die Streckung ist dabei gegeben durch Z , A und A' auf einer Geraden.

6.2.15.10 Beweisübung Lote auf sc

Die Beweisfigur wird variiert, um Gleichheiten oder Kongruenzen sehen zu können.

6.2.15.11 Beweisübung (gleichseitiges Dreieck)

Ein Makro „gleichseitiges Dreieck“ wird erstellt und dann verwendet. Bei dem ersten Beispiel ist die Gleichheit der Strecken aus Symmetriegründen sofort einsichtig, bei dem zweiten müssen erst kongruente Dreiecke gefunden werden. Die Variation der Figur läßt erkennen, welche Stücke gleich sind.

6.2.15.12 Beweisübung (Umkreis-Viereck)

Ein beliebiges Viereck wird in vier Teildreiecke zerlegt. Ihre vier

Umkreismittelpunkte bilden ein Parallelogramm. Variation der Figur zeigt, daß dies immer stimmt, auch in Sonderfällen. Der Beweis bestätigt das und erkennt weitere Eigenschaften von Winkeln und Längen.

6.2.15.13 Probieren (Tangenten von P)

Bei der Aufgabe entwickeln Schüler gerne Ideen, etwa Lot in der Mitte von $[PM]$ mit dem Kreis zu schneiden oder ähnliches. Mit Cabri läßt sich schnell überprüfen, ob diese Ideen auch bei anderen Lagen oder Größen der Kreise passen.

6.2.15.14 Probieren (Paarweise Schenkel)

Für Winkel, deren Schenkel paarweise parallel bzw. senkrecht sind, gibt es verschiedene Lagen. Rasch lassen sie sich durchprobieren, bis man sieht, daß jeweils zwei Typen zu unterscheiden sind.

6.2.15.15 Probieren (Winkel über AB)

Mit mehr oder weniger Geschicklichkeit läßt sich die Maus so bewegen, daß der Winkel ACB ungefähr gleich bleibt. Zeichnet man nach einem Vorversuch die ausprobierte Bahn als Ortslinie mit, kann man einen Kreisbogen erraten. Die Bewegung auf einem exakten Kreisbogen bestätigt die Vermutung.

6.2.15.16 Höhere Kurven (als Ortslinien)

Eine leichte Abwandlung der zentrischen Streckung (die Punkte $Z A$ und A' liegen nicht mehr auf einer Geraden) erzeugt aus einem Kreis abenteuerliche Bilder. Mit dem Ortslinienverfahren läßt sich systematisch verfolgen, was die analytische Geometrie rechnerisch bestätigt.

6.2.15.17 Geometrische Optik

Die Konstruktion der Reflexion am Hohlspiegel wird als Makro verwendet, um den Verlauf mehrerer Strahlen bequem verfolgen zu können. Ähnlich ist natürlich auch die Konstruktion des Bildpunkts oder der gebrochenen Strahlen an einer Linse als Makro verwendbar (Basisobjekte etwa P , Linsenmitte, Brennpunkt). Die Abbildung durch mehrere Linsen läßt sich damit ebenso erforschen.

6.2.16 Hilfsmittel

Makros, die man öfter brauchen kann, sind hier kurz beschrieben, so daß sie relativ rasch eingegeben werden können. Im Makrotitel sind schon die Argumente in der richtigen Reihenfolge aufgeführt, so daß ein Hilfetext eigentlich unnötig ist und allenfalls die Abkürzungen etwas ausführlicher erläutern sollte.

6.2.16.1 Einfache Makros

6.2.16.2 Makro für Habakopf

Ein durch drei Punkte definiertes, bewegliches Männchen, das Kreise und Strecken enthält. Vor allem für die Untersuchung von Abbildungen.

6.2.16.3 Inversion

Die Spiegelung am Einheitskreis läßt sich mit dem Strahlensatz leicht konstruieren. Sie zu erforschen verlangt aber erheblichen Zeichen- und damit Zeitaufwand. Mit einigen Cabri-Makros kann man bequem experimentieren und damit ein Gefühl für eine Abbildung gewinnen, die über die einfache Ähnlichkeit hinausgeht, aber in ihrer Kreistreue doch im Rahmen der Elementargeometrie bleibt. Die Erweiterung der Geometrie durch Winkel zwischen Kreisen und das Bild

des unendlich fernen Punktes gibt neue Denkanstöße.

Da in Cabri noch keine Kreisbögen verfügbar sind, wird das Bild einer Strecke aus vier Teilstrecken zusammengesetzt, was zumindest für die Anschauung ausreicht.

6.2.16.4 Zentrische Streckung

Für die zentrische Streckung wird ein Makro erstellt und auf beliebige Punkte angewandt.

6.2.16.5 Verkettung von Streckungen

Durch Probieren wird erforscht, ob sich wieder eine zentrische Streckung ergibt und welchen Faktor sie hat.

6.3 Translation

6.3.1 Ziel

Einführung der Translation als Hintereinanderausführung von zwei Achsenspiegelungen mit zueinander parallelen Achsen; Abbildungsvorschrift und Eigenschaften der Translation (Lehrplan Jahrgangsstufe 7).

Mit dem interaktiven Geometrieprogramm Cabri-Géomètre, das es erlaubt, eine Zeichnung am Bildschirm darzustellen und diese dynamisch mit stetigen Übergängen zu verändern, werden aus einer Konfiguration, die einen Begriff, einen Satz oder einen geometrischen Zusammenhang repräsentiert, eine Vielzahl weiterer Konfigurationen erzeugt. Dabei werden Sonderfälle mit einbezogen sowie invariante Eigenschaften der Konfiguration erkannt.

Die Schüler erhalten so Gelegenheit, durch selbständiges und systematisches Experimentieren Eigenschaften und Zusammenhänge zu entdecken sowie Vermutungen aufzustellen und diese sofort zu überprüfen.

Der „Zugmodus“ überwindet die Statik üblicher Tafel- bzw. Folienszeichnungen und gewährt so durch das sichtbare wie auch geistige Beweglichmachen einer geometrischen Konfiguration einen unschätzbaren Vorteil im Hinblick auf das notwendige Veranschaulichen und Einsichtigmachen.

Der Zeitbedarf bei Verwendung des Rechners als methodisches Hilfsmittel ist nicht größer als bei einer üblichen Vorgehensweise. Als Voraussetzung sind den Schülern die Achsenspiegelung mit deren Abbildungsvorschrift und Eigenschaften bekannt.

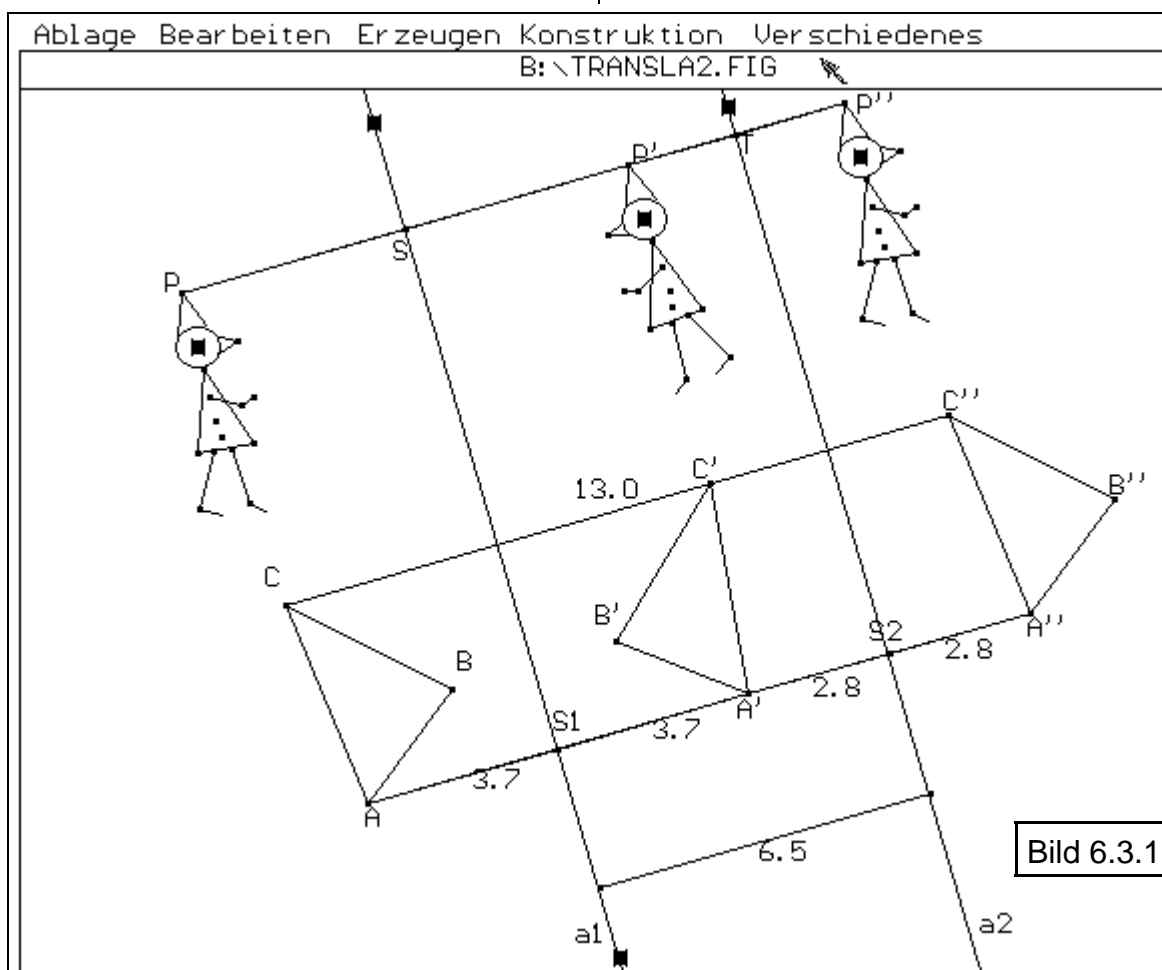


Bild 6.3.1

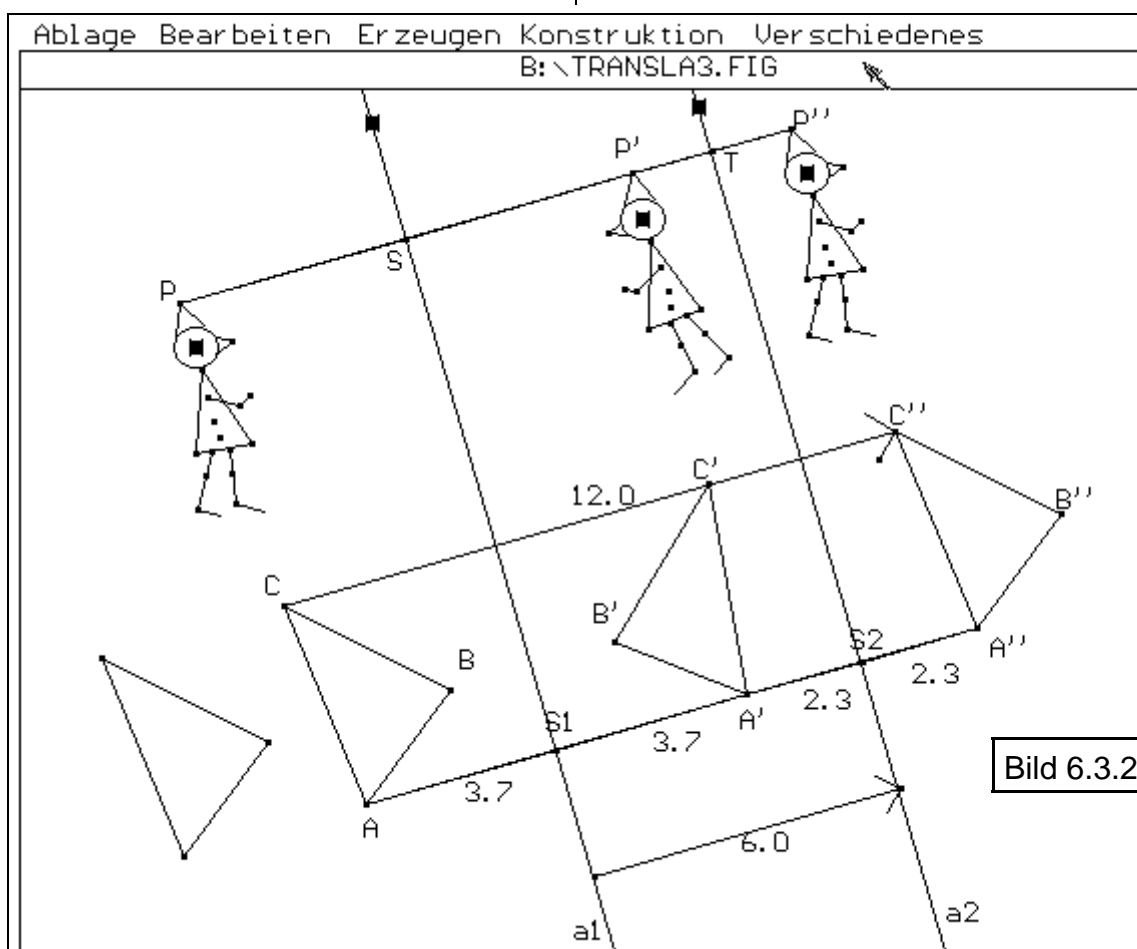
6.3.2 Mögliche Erarbeitung im Unterricht

1. Vorgabe am Bildschirm (Bild 6.3.1): Betrachtung der Abbildung führt zur Vermutung: zweifache Achsenspiegelung (evtl. schon Verschiebung?).
2. Auftrag:
Spiegle Dreieck ABC an der Achse a_1 und anschließend das Bilddreieck $A'B'C'$ an der Achse a_2 . (Hinweis: Symmetrischer Punkt aus Menü Konstruktionen oder Makro Dreieck an Achse spiegeln).
3. Durch Experimentieren mit der Konfiguration am Bildschirm wird die Vermutung erhärtet:
 - die Originalfigur (Nase, Hut, Hand,...) bzw. das Originaldreieck (Eckpunkt) werden verändert;
 - die Lage der Achse a_1 wird verändert („Griff“ an a_1);
 - der Abstand d zwischen a_1 und a_2 wird verändert („Griff“ an a_2):

- a) vergrößert,
- b) verkleinert,
- c) $d = 0$,
- d) d negativ, d. h. a_2 kommt links von a_1 zu liegen.

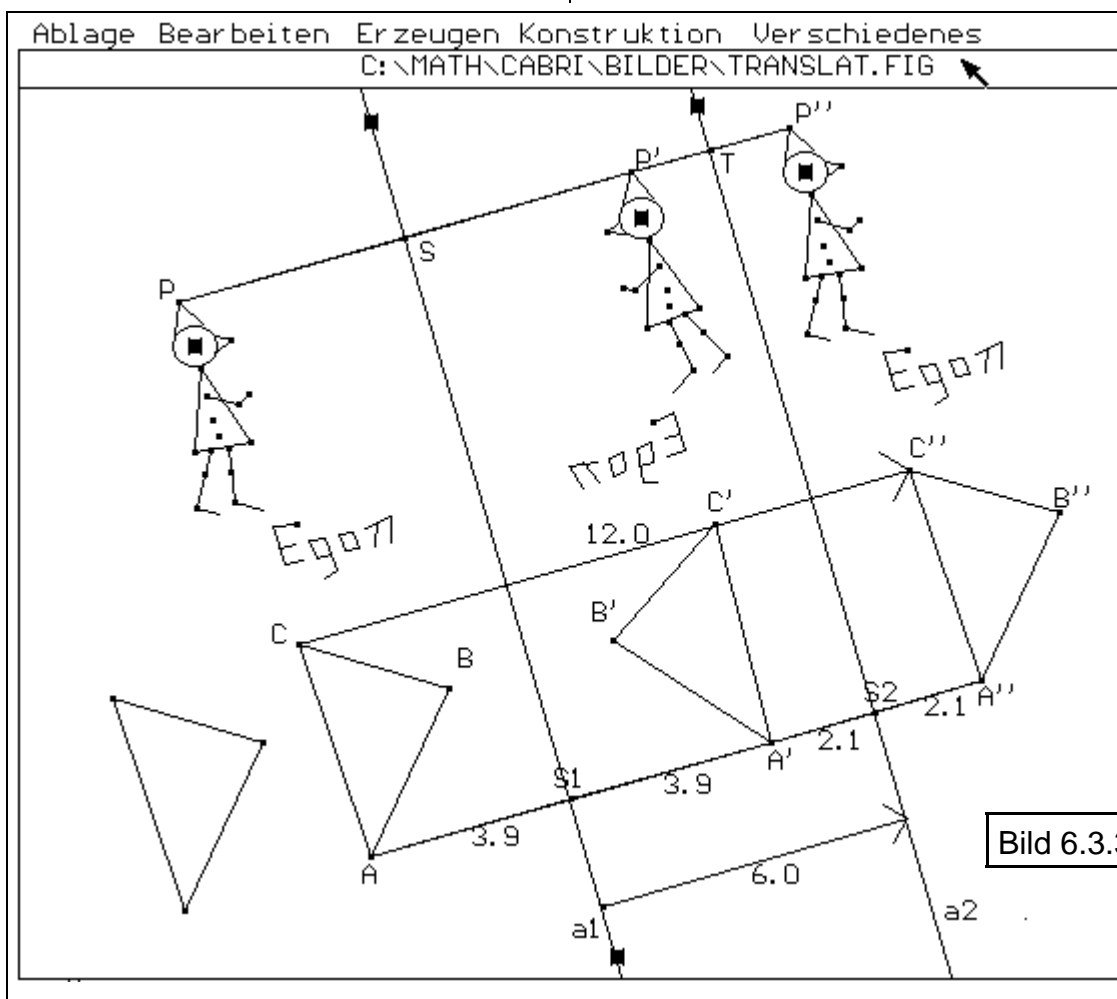
4. Das schwarze Dreieck (links) wird mit dem Dreieck ABC zur Deckung gebracht und anschließend längs der Geraden durch C und C' auf Dreieck $A''B''C''$ verschoben („Griff“ ist die auf der Geraden liegende Dreiecksecke; Bild 6.3.3).

Ergebnis: Die Aufeinanderfolge von zwei Achsenspiegelungen mit zueinander parallelen Achsen kann durch eine Verschiebung ersetzt werden; Der Fall 3. d) führt zu der Aussage, daß die Richtung der Verschiebung von der Orientierung der beiden Achsen abhängt; Begriff des Verschiebungsvektors bzw. Verschiebungsvektors als kennzeichnende Größe dieser Abbildung; Richtung des Verschiebungsvektors;



5. Die Tatsache, daß das Bild bei dieser Abbildung erst dann angegeben werden kann, die Abbildung erst dann vollständig bestimmt ist (Abbildungsvorschrift), wenn neben der Richtung auch die Länge des Verschiebungspfeils gegeben ist, führt in Zusammenhang mit einer Veränderung des Abstandes d der beiden Spiegelachsen (s. 3.) zu der Vermutung, daß die Länge des Verschiebungspfeils $= 2d$ ist.
6. Messen der Strecken (Messen aus Menü Verschiedenes) $PS, SP, PT, TP', AS_1, S_1A', A'S_2, S_2A'', PP', AA''$ und des Abstandes d von a_1 und a_2 (Bild 6.3.2 und 6.3.3) erhärtet die Vermutung in anschaulicher Weise und liefert zusammen mit der Abbildungsvorschrift für die Achsen Spiegelung den Beweis der Vermutung. Hier sollte auch nochmals, im

- Sinne der Allgemeingültigkeit der Aussage, der Fall 3. d), a_2 links von a_1 , angesprochen werden.
7. Zusammenfassende Formulierung der Ergebnisse:
- Eine Doppelachsenspiegelung an zwei parallelen Achsen kann durch eine Verschiebung ersetzt werden;
 - der Verschiebungspfeil steht senkrecht auf den Achsen, seine Länge ist gleich dem doppelten Abstand der beiden Achsen;
 - eine Verschiebung ist durch Angabe des Verschiebungsvektors vollständig festgelegt.
 - Eigenschaften der Verschiebung
- Zusatz: Was ergibt sich, wenn die Reihenfolge der beiden Achsen Spiegelungen vertauscht wird?



6.4 Geolog

Geolog ist ein seit 1987 bei Prof. Holland, Universität Gießen, entwickeltes Programm, dessen Zweck es ist, eine vom Benutzer einzutippende Konstruktionsbeschreibung umzusetzen in eine Zeichnung. Es ist in Turbo-Prolog geschrieben und liegt in einer Version für Atari ST und einer für MS-DOS vor. Die weitere Entwicklung plant die Unterstützung der Schülerideen für Konstruktionen und Beweise durch eine Expertensystem-Komponente. (Lit.: Gerhard Holland, Konstruieren mit dem Computer, in: Klaus D. Graf (Hrsg.) Computer in der Schule 3., Teubner, Stuttgart 1990)

6.4.1 Allgemeines

Geolog erlaubt, mit Funktionstasten und Maus bzw. Pfeiltasten aus einem Menü Befehle zu wählen, oder die entsprechenden Konstruktionsanweisungen einzutippen, und im Zeichenfenster Punkte zu setzen. Die mathematischen Zusammenhänge sind durch den Beschreibungstext und evtl. darin angegebene Längen- und Winkelgrößen festgelegt, so daß eine Änderung dort auch eine Änderung der Figur bewirkt. Man kann also – und das ist die Stärke von Geolog – viele der möglichen Figuren zur selben Aufgabe zeichnen lassen, ohne selbst konstruieren zu müssen. Die Tätigkeit des Schülers richtet sich sehr viel mehr auf die logische Durchdringung der Aufgabe als auf die zeichnerische Darstellung.

Im Unterschied etwa zu Cabri ist Geolog auf die strikte, lückenlose Abfassung des Konstruktionstextes bedacht. Zahlen und Terme können deshalb in ihm so verwendet werden, wie dies etwa in Algebra oder den Programmiersprachen üblich ist.

Die gebotene Benutzeroberfläche ist an Fenstertechnik orientiert, aber an vielen Stellen noch verwirrend und viel zu umständlich zu bedienen!

6.4.2 Arbeitsweise

Geolog arbeitet im wesentlichen in zwei Fenstern, einem für die Zeichnung und einem für die Eingabe der Beschreibung bzw. für das Menü. Es läßt sich deshalb im Tastatur-Modus arbeiten, wo alle Anweisungen eingetippt werden, oder im Menü-Modus, in dem die möglichen Anweisungen ausgewählt und dann mit passenden Argumenten versehen werden. Für Versierte ist auch ein Schnelleingabe-Modus möglich. Zwischen den Modi läßt sich wechseln.

6.4.3 Objekte

Jedes Objekt, auch Hilfslinien, muß einen Namen bekommen (i. a. werden Punkte mit großen Buchstaben, Linien mit kleinen bezeichnet, auch lange Namen sind möglich); auf Wunsch werden sie in alphabetischer Reihenfolge automatisch vergeben. In der Zeichnung können alle Namen ausgeblendet werden.

6.4.4 Konstruktion

Eine Konstruktionsbeschreibung besteht aus einer Folge von Anweisungen, die die Objekte erzeugen, z. B. für eine Tangente im Kreispunkt: $k=\text{kreis}$; $P=\text{punktauf}(k)$; $M=\text{krmp}(k)$; $f=g(M,P)$; $t=\text{ortho}(P,f)$. Durch den Namen wird ein Objekt identifiziert und kann auch wieder gelöscht werden.

6.4.5 Basisobjekte

Bei Basisobjekten (punkt, gerade, kreis, punktauf()) wird man aufgefordert, im Zeichenfenster mit Maus oder Pfeiltasten

ein vorhandenes Objekt zu identifizieren oder neu zu erzeugen.

6.4.6 Orientierung

Da Geolog Geraden von Halbgeraden unterscheidet, ist die Abtragung von Strecken bzw. Winkeln in einer bestimmten Richtung möglich, mit negativen Angaben auch in der Gegenrichtung.

6.4.7 Termsubstitution

In den Anweisungen kann man statt der Argumente auch Terme einsetzen, die bei der Konstruktion ausgewertet werden. Die in ihnen enthaltenen Hilfslinien werden dann nicht sichtbar. Für die Kreistangente genügt z. B.

$$t = \text{ortho}(P, g(\text{krmp}(k), P)).$$

Hier kommt die Stärke von Prolog zum Ausdruck, sowie eine beabsichtigte Strukturierung der geometrischen Beschreibungssprache, die ganz im Sinne des Informatikunterrichts ist.

6.4.8 Beispiel

Als Beispiel stehe hier die Anweisungsfolge für Inkreis:

```
A=punkt
B=punkt
C=punkt
M=wh(A,B,C)&wh(B,C,A)
Q=g(B,C)&ortho(M,g(B,C))
k=k(M,Q)
```

6.4.9 Syntaxfehler

Die Schlüsselwörter müssen vollständig und kleingeschrieben eingegeben werden. Bei Syntaxfehlern wird einfach die ganze Anweisung gelöscht. Anweisungen können leider nicht editiert werden. In der Anweisungsliste läßt sich auch weder umstellen noch einfügen.

6.4.10 Größen

Größen von Strecken oder Winkeln lassen sich nicht nur durch Messung ermitteln

(z. B. $r=l(E,F)$ oder $\alpha=w(u,v)$), sondern auch in Anweisungen verwenden zum Antragen, als Radius usw. Auch mit ihnen sind Terme möglich wie $2*\alpha - \beta$. Einmal je Anweisungsliste läßt sich einer Länge eine Normgröße zuordnen, an der dann alle anderen Längenangaben gemessen werden.

6.4.11 Polygone

Strecken, Dreiecke und Polygone lassen sich aus ihrer Punktliste mit einer Anweisung zeichnen, bilden aber kein eigenes Objekt.

6.4.12 Schnittpunkte

Die Mehrdeutigkeit von Schnittpunkten wurde so gelöst, daß grundsätzlich g & k und k & g verschiedene Schnittpunkte liefern. Zwar liefert auch g & k den zweiten Punkt, wenn der erste schon vorher erzeugt wurde, etwas anders ist das aber bei eingesetzten Termen, weil deren Objekte gar nicht erzeugt werden.

6.4.13 Objektdarstellung

Punkte, Geraden, Kreise lassen sich jeweils farbig, fett oder dünn darstellen oder als Hilfslinie ganz ausblenden. Die Objekte lassen sich beliebig mit Namen (bis zu 4 Zeichen) benennen, wobei die Namen wie auch die Maßzahlen in der Nähe des Objekts plaziert werden.

6.4.14 Veränderung der Bilder

Ein konstruiertes und evtl. gespeichertes Bild läßt sich verschieben, vergrößern, verkleinern und drehen. Es läßt sich auch mit neuen Basisobjekten neu

konstruieren. Nach Wahl eines Basispunktes läßt sich für diesen eine variierte Position angeben, so daß eine Folge von Zeichnungen erzeugt wird. Wurde ein Punkt an eine Linie gebunden, kann er nur auf ihr verschoben werden. Auch eine Sequenz von Bildern ohne zwischengeschaltetes Löschen läßt sich betrachten. Geometrische Zusammenhänge werden daran besonders deutlich.

6.4.15 Prozeduren

Unter einer Prozedur versteht Geolog eine vom Benutzer definierte Folge von Anweisungen. Ihr zuletzt erzeugtes Objekt ist das Ergebnis der Prozedur. Sie ist wie die vom System vordefinierten unter einem Namen aufrufbar. Auch ein Zahlenwert, z. B. der Flächeninhalt, kann das Ergebnis einer Prozedur sein. Sie entspricht damit etwa einer Funktion in Pascal. Hilfetexte für den Anwender oder Kommentare sind leider weder in der Anweisungsliste noch in der Prozedurdefinition möglich.

6.4.16 Makros

Ein Makro in Geolog kann mehrere Ergebnisse liefern und wird mit einer

Liste von Eingangs- und Ergebnisparametern aufgerufen, z. B. `quadrat(A,B,C,D)` für das Quadrat aus der Seite $[AB]$. Ein Makro kann auch ein ganzes Polygon zeichnen.

6.4.17 Arbeitsumgebung

Grundsätzlich wird die gesamte Arbeitsumgebung mit den konstruierten und gespeicherten Bildern und den selbstdefinierten Prozeduren und Makros in einer Benutzerdatei gespeichert. Beim nächsten Start wird sie automatisch geladen, so daß sich dieselbe Arbeitssituation wieder einstellt. Durch Umbenennen lassen sich mehrere vollständige Arbeitsumgebungen bereithalten. Prozeduren oder Makros aus anderen Umgebungen lassen sich aber nicht einbeziehen.

6.4.18 Anleitungsblatt

Neben dem mit Geolog auf Diskette gelieferten etwa zehnteiligen Tutorial und den abrufbaren Hilfetexten fanden wir für die ersten noch recht mühsamen Erfahrungen ein kurzes Anleitungsblatt nützlich.

6.5 Konstr

KONSTR wurde 1992 von Th. Stark, Kaufbeuren, entworfen, um Schülern die Möglichkeit zu geben, Bildschirm- und Plotterzeichnungen anzufertigen, ohne ein kompliziertes CAD-System bedienen zu müssen.

6.5.1 Allgemeines

Unter einer sehr ansprechenden Menü-Oberfläche (Turbo Vision) läßt sich die Konstruktionsbeschreibung in einer der Schulgeometrie weitgehend angepaßten Sprache eintippen. Kontextsensitive Hilfetexte und ausführliche Fehlermeldungen erleichtern die Arbeit. Text läßt sich markieren, ausschneiden und einsetzen, suchen und ersetzen. Damit ist das Programm zugleich eine einleuchtende Einführung in Computerbedienung und Textbearbeitung, gerade für Unterklassen, die mit Texten sonst noch nicht so viel zu tun haben wollen.

6.5.2 Arbeitsweise

Mehrere Fenster sind möglich. Sie können verschoben, vergrößert und verkleinert werden. Öfter gebrauchte Befehle lassen sich auch über Funktionstasten aufrufen.

Als Objekttypen vorgesehen sind Punkt, Strecke, Halbgerade, Gerade und Kreis. Die Basisobjekte werden durch ihre Koordinaten festgelegt. Achsen, ein ganzzahliges Punktraster und ein Rand können eingezeichnet werden.

In die Konstruktionsbeschreibung werden freie Kommentare und Steueranweisungen über Pausen, Beschriftung, Sichtbarkeit und Farben eingestreut. Nach der Anfertigung einer Zeichnung läßt sich eine Liste aller in ihr enthaltenen Objekte ausgeben, die die

Sichtbarkeit, Farbe, Koordinaten Richtung und Länge enthält. Eine Ergebniskontrolle etwa von Hausaufgaben wird damit erleichtert.

6.5.3 Objekte

Jedes Objekt muß einen Namen bekommen, kann aber auch umbenannt werden. Strecken, Halbgeraden und Geraden lassen sich in einander umtypisieren, als „Anfang“ dient dabei ganz einleuchtend der beim ersten Auftreten verwendete Anfangspunkt.

Abgeleitete Objekte erhält man als Schnittpunkt, Mittelpunkt, Teilpunkt, Lot, Mittellot, Parallele, Schenkel, Winkelhalbierende, Thaleskreis oder Tangente. Auch Polygon und reguläres n -Eck (sogar $n = 3..100$) sind möglich.

Viel Gebrauch wurde vom Polymorphismus gemacht. So ist z. B. für eine Halbgerade möglich: $[A; B, [s, [g, [A; 60, [h; 60, [-3;-2;5;1$

6.5.4 Schnittpunkte

Vom verlangten Befehlsaufbau „Schlüsselwort Name Argumente“ wird bei den Schnittpunkten abgewichen. Hier müssen die Namen ans Ende und zwar genau so viele wie gebraucht werden. Bei Tangenten werden sogar interne Namen verwendet, falls es mehrere Berührungspunkte und Tangenten gibt.

6.5.5 Zeichnung

Die im aktuellen Fenster stehende Beschreibung wird interpretiert und in eine Bildschirmzeichnung umgesetzt. Tritt ein Fehler auf oder wird die Zeichnung nicht mehr gewünscht, kehrt das Programm in den Editiermodus zurück. Text und Zeichnung sieht man leider nicht gleichzeitig.

Die Zeichnung läßt sich nach Wunsch auch schrittweise und mit Pausen nach bestimmten oder allen Schritten ausgeben

Objekte wie Geraden oder Kreise lassen sich durchgehend, gepunktet oder gestrichelt in der gewünschten Farbe zeichnen und mit ihrem Namen beschriften. Ihre Sichtbarkeit kann in der Konstruktionsbeschreibung sehr brauchbar in drei Stufen generell oder individuell festgelegt werden: sichtbar, unsichtbar, teilweise sichtbar (in der Umgebung ihrer Schnittpunkte).

Die Zeichnung kann auch an einen Drucker, Plotter oder eine von anderen Programmen verwendbare Datei ausgegeben werden.

6.5.6 Größen, Terme, Makros

Größen werden in KONSTR sehr einfach und häufig verwendet, sowohl Koordinaten als auch Längen- und Winkelmaße. Die Definition von Makros und die Verwendung von Termen ist leider nicht vorgesehen, obwohl beides bei einem Interpreter möglich schiene. Für Terme

sind auch die verwendeten Schlüsselwörter zu lang, die Klammer- und die Befehlsstruktur nicht recht geeignet. Ein Befehlsaufbau $Q: \text{Kreis } M r$ würde das erleichtern, könnte auch einmal auf explizite Namen verzichten, z. B. auch bei Mehrfachschnittpunkten. Das Sichtbarkeitsmerkmal könnte dann in der vordersten Spalte stehen.

6.5.7 Veränderung der Bilder

Eine Veränderung der Zeichnung ist nur möglich durch eine Änderung der Konstruktionsbeschreibung, z. B. die Änderung der Koordinaten- oder Winkelangaben. Dann wird eine neue Zeichnung erstellt, die alte ist nicht mehr vorhanden. Eine direkte Bewegung auf dem Grafikschilder scheidet ohnehin aus. Experimentieren ist mit dieser Programmversion also nicht so gut möglich. Es ist einem bequemen Plotterprogramm deutlich näher als einem Geometrie-werkzeug. Dazu fehlt noch viel. Umgekehrt bieten die Oberfläche und die Sprache einen relativ leichten und fehlertoleranten Zugang zum Thema „vom Text zur Zeichnung“.

6.6 Abbilden

Mehr als DREIECKE und TRIGONOM bietet dieses Programm von K. D. Hein Möglichkeiten, selbst Zusammenhänge und Gesetze experimentell zu finden, beschränkt sich allerdings auf die Themenkreise Achsenspiegelung (eine oder zwei Achsen), Punktspiegelung, Ver-schiebung, Drehung und Streckung.

6.6.1 Allgemeines

In einer sorgfältig aufgebauten Menü-Oberfläche lassen sich mit Maus, Cursortasten oder Einzelbuchstaben Objekte und Befehle auswählen oder Werte mit + und - verändern. Hilfetexte sind praktisch überall abrufbar. Die Voreinstellung ist über ein Paßwort gesichert.

6.6.2 Arbeitsweise

Beliebig erstellte Figuren – und das ist die Stärke von ABBILDEN – werden einer festgelegten Abbildung unterworfen, wobei man wählen kann, ob die Abbildung sofort, verzögert, oder erst auf Wunsch ausgeführt wird und ob ihr Resultat zum neuen Urbild wird oder zum Urbild dazukommt.

6.6.3 Objekte

Als Objekttypen vorgesehen sind Strecke und Streckenzug, Gerade, Bogen (aus M, A, B oder A, B, C), Dreieck, Rechteck, Parallelogramm und Kreis. Dabei sind zur Erleichterung Steigungswinkel bzw. Entfernungen anzeigbar und ein 5 mm-Raster einzuschalten. Gleichseitiges Dreieck sowie Quadrat lassen sich direkt aufrufen. Auch Winkel lassen sich zeichnen (als ASB oder ABS).

Die Figuren lassen sich durch Verschieben oder durch Verschieben einzelner Punkte verändern, auch teilweise löschen und wieder zurückholen. In die Figuren lassen sich Markierungspunkte bzw. -linien eintragen, die nicht mit abgebildet werden.

6.6.4 Abbildungen

Zwei Spiegelachsen lassen sich festlegen, die zweite auch wieder löschen, der Winkel zwischen ihnen wird angezeigt. Es läßt sich auch ein Verschiebungsvektor bestimmen, ein Spiegel- oder Dreh- oder Streckungszentrum und die zugehörigen anderen Elemente. Eine einmal festgelegte Abbildung läßt sich aus- und einschalten. Auf Wunsch werden die Verbindungsstrecken von Original und Spiegelbild als Hilfslinien gezeigt.

6.6.5 Zeichnung

Mit der Möglichkeit, eine Figur aus mehreren einfachen Elementen zusammensetzen, zu verändern, und als Ganzes abzubilden, lassen sich viel eindrücklicher als mit den üblichen Dreiecken Vorstellungen vom Abbildungsvorgang gewinnen. Gerade die nachträgliche Abänderung erlaubt ein „Spielen“, das die bestimmenden Abhängigkeiten erfahren läßt.

In der Figurerzeugung ist das Programm den Zeichenprogrammen verwandt, bei der Abbildung den Geometriepro-grammen.

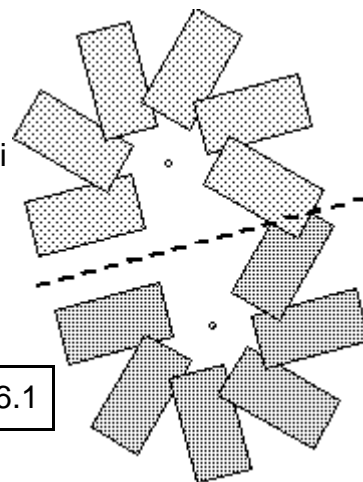


Bild 6.6.1

6.7 Polyeder: Regelmäßige Körper in Rotation

POLYEDER stellt einfache Körper als Kantenmodelle auf dem Bildschirm dar. Die Körper lassen sich drehen, so daß man gut verfolgen kann, wie sich der Raumeindruck auf dem Bildschirm verändert. Unsichtbare Kanten kann man, wie manches andere, ein- und ausblenden.

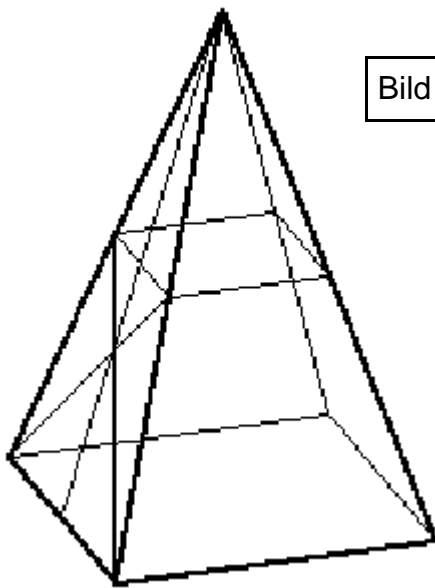


Bild 6.7.1

(MS-DOS unter GEM-Desktop, Windows oder Macintosh, Autoren: B. Eder, U. Freiberger.)

6.7.1 Unterstufe

Für die Unterstufe wird man einfache Körper, also Würfel, quadratische Säule, Quader, 3, 4, 6, 8seitige Prismen und Pyramiden wählen, von denen die 8seitigen auch ganz gut Zylinder und Kegel vertreten können. Als Rotationsachsen bietet sich jeweils eine der Körperachsen an.

Die Körperrückseiten, also die verdeckten Linien, lassen sich ein- und ausblenden, ebenso Koordinatenachsen, In-

kugel und Umkugel. Bei der Drehung der Körper erfährt man unmittelbar, wie ein Körper in zweidimensionaler Darstellung erscheint, insbesondere in den Lagen, in denen Kanten nur noch als Punkte und Flächen nur noch als Strecken sichtbar sind.

Mit eingefügten Linien, die die Ecken, Kantenmitten oder Seitenflächen verbinden, lassen sich Figurenteile bei der Drehung besonders gut verfolgen. Deutlich wird dabei auch, daß man selten die wahre Größe der entstandenen Vielecke sieht, meist verkürzte Darstellungen, deren Lage räumlich beschrieben werden muß.

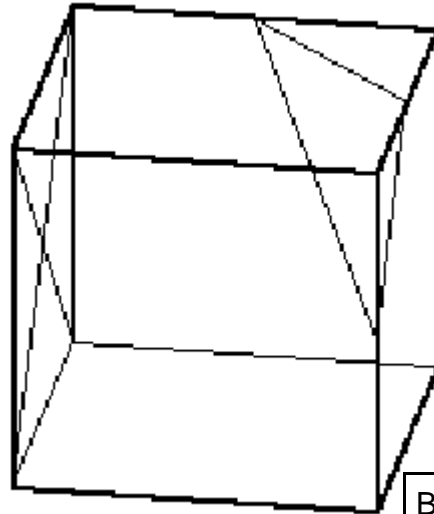


Bild 6.7.2

Projiziert man die Bilder über ein Datendisplay an die Wand, dann läßt sich der Körper mit „vorne“, „hinten“, „links“, „rechts“, „unten“ und „oben“ beschreiben. Ein wirkliches Drahtmodell wird mit der zweidimensionalen Zeichnung verglichen. Das übt die Interpretation eines Schrägbilds und schult die Raumvorstellung.

Man kann aber auch die Schüler allein oder in kleinen Gruppen selbst am Bildschirm experimentieren lassen. Neben einfachen Beschreibungsaufgaben, wie Ecken, Kanten, Flächen zu zählen und ihre Gemeinsamkeiten zu

suchen, kann man bestimmte Tätigkeiten verlangen, z. B. einen Würfel durch geeignete Drehung auf eine Kante oder eine Ecke zu stellen. Man kann Sichtbarkeiten untersuchen und dazu Freihandzeichnungen anfertigen lassen. Schon kleine Drehungen hin und her lassen die räumliche Tiefe erkennen. Schüler, die an der Tafel immer nur ein Strichgewirre erkennen konnten, lernen räumlich zu sehen.

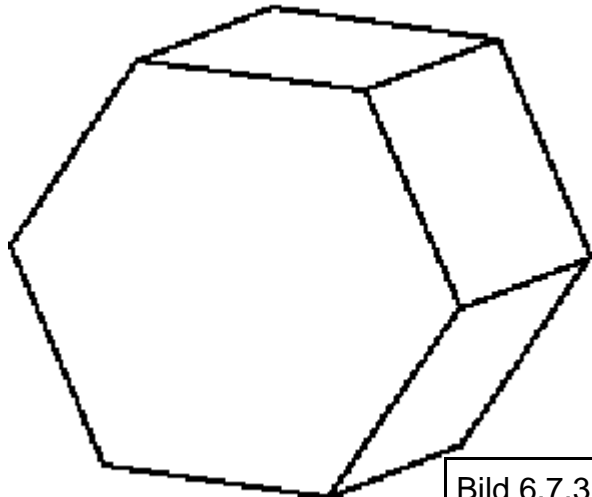


Bild 6.7.3

Eine unterhaltsame Belohnung am Ende ist die „Drehbahn“, die sich ergibt, wenn sich die rotierenden Bilder alle überlagern.

6.7.2 Mittelstufe

Körper:

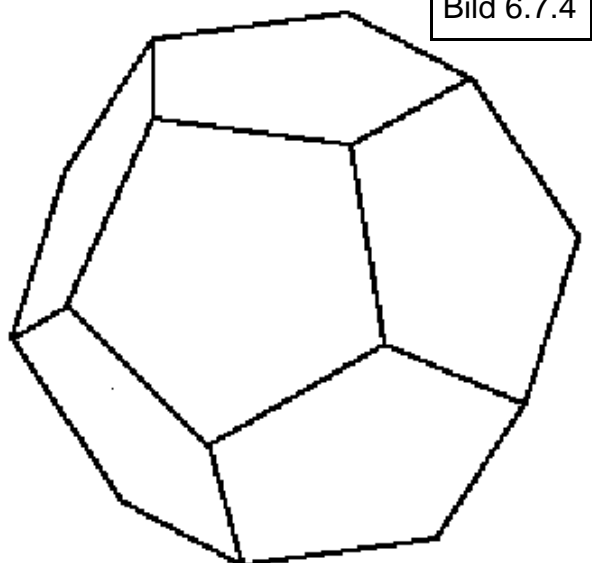


Bild 6.7.4

In der Mittelstufe kann man zu einem reicheren Vorrat an Körpern übergehen, insbesondere Oktaeder, Hexaeder, Dodekaeder und Ikosaeder, ihre Eigenschaften beschreiben und wiederum Umkugel, Inkugel oder Mittelkugel einblenden. In mehreren Fenstern lassen sich auch mehrere Körper gleichzeitig drehen.

Risse

In der Mittelstufe kann man aber auch untersuchen, wie sich der Körper in Grund-, Auf- und Kreuzriß darstellt, die zugleich mit dem Raumbild auf dem Bildschirm eingeblendet werden können. Bei der Rotation des Körpers ändern sich auch die Risse, so daß ihr Zusammenhang untereinander jederzeit verfolgt werden kann. Hier bieten sich wieder Aufgaben an, bei denen bestimmte Stellungen zu erreichen sind. Auch die eingefügten Linien zwischen Ecken, Kantenmitten oder Seiten werden wiedergegeben, was die Zuordnung der Risse zum Raumbild erleichtert. Mit ihnen läßt sich auch die Erzeugung halbregulärer Körper zeigen.

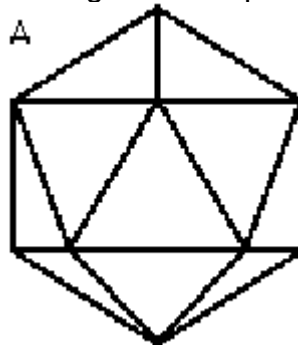


Bild 6.7.5

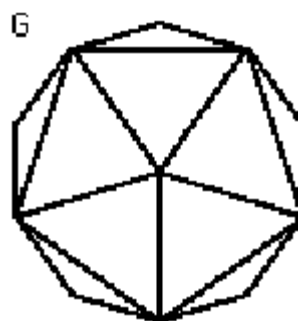


Bild 6.7.6

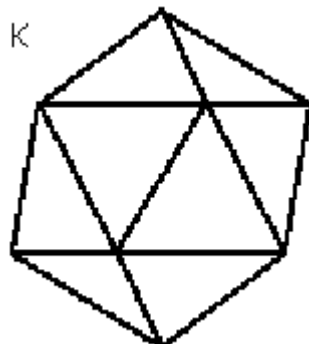


Bild 6.7.7

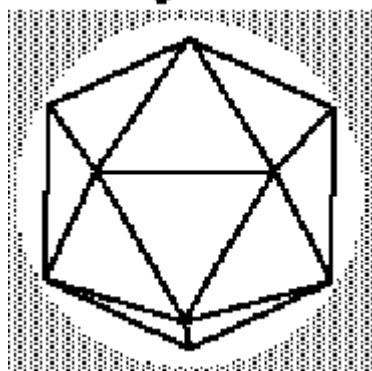


Bild 6.7.8

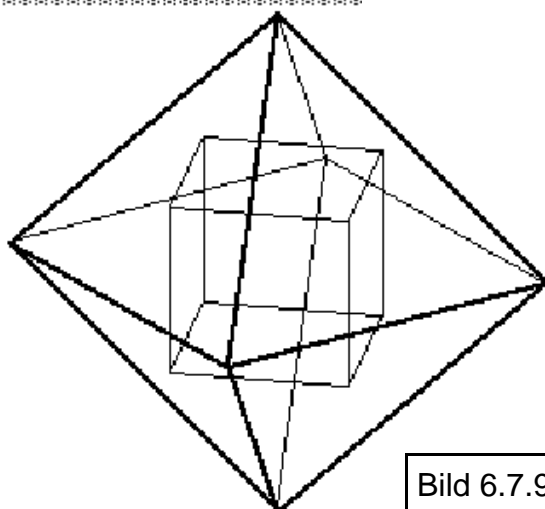


Bild 6.7.9

Abbildungsverfahren

In der Mittelstufe kann man auch den Einfluß des verwendeten Abbildungsverfahrens studieren, indem für denselben Körper in derselben Lage verschiedene von den sechs vorgesehenen Projektionsarten gewählt werden (iso-, di-, trimetrisch, Kavalier- und Militärprojektion, Zentralprojektion ist nicht vorgesehen).

Weiterverarbeitung

Die Bilder lassen sich drucken oder zur Weiterverarbeitung mit einer anderen

Applikation speichern. Dabei kann auch die Arbeit mit verschiedenen Programmen gelernt werden. Vor allem aber lassen sich einige der vielen gesehene- nen Eindrücke festhalten und auch als statische Bilder räumlich interpretieren.

Das Programm POLYEDER verlockt zum Spielen, das ist eine seiner Stärken. Um es gezielt nutzbar zu machen, sollte man Aufgaben stellen, deren Ergebnisse in Hefteinträgen festzuhalten sind. Zum grafischen Reiz bewegter Bilder kommt so die gedankliche Umsetzung in räumliche Konfigurationen, Hauptzweck des Programms!

6.8 KUGEL

KUGEL (B. Eder, U. Freiberger, K. Stecher) soll den Unterricht in Kugelgeometrie und Sphärischer Trigonometrie dadurch erleichtern, daß sich Folien und Arbeitsblätter erstellen lassen und die Schüler entsprechende Konfigurationen auch selbst am Bildschirm produzieren und aus verschiedenen Richtungen betrachten können.

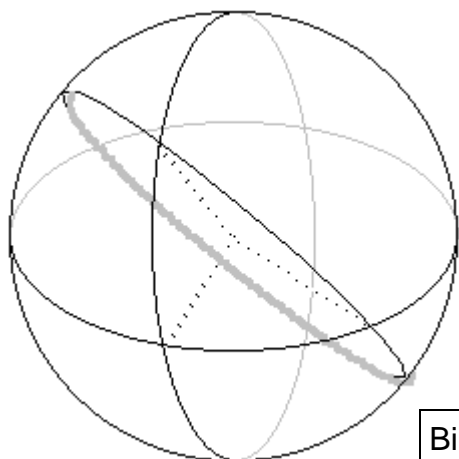


Bild 6.8.1

6.8.1 Allgemeines

Das Programm wird in der GEM-Oberfläche aufgerufen und über Menüs oder Tastenkombinationen bedient. EDV-Kenntnisse sind nicht nötig. Geographische Koordinaten sollten bekannt sein; im allgemeinen wird man sich auf den Erdkundeunterricht berufen können. Die erzeugten Zeichnungen lassen sich speichern und mit anderen GEM-Programmen beschriften und weiterbearbeiten.

6.8.2 Arbeitsweise

In eine Objektliste werden die zu zeichnenden Objekte eingetragen und dann in bis zu drei Fenstern aus der jeweils gewünschten Richtung betrachtet.

Linien auf der Kugelrückseite erscheinen gestrichelt, doch läßt sich bei jedem Objekt angeben, ob der unsichtbare Teil

oder der sichtbare Teil einzuzeichnen sind, beide oder keiner. So läßt sich die Zeichnung ohne große Veränderung der Objektliste gestalten.

Nach Doppelklick in eine Zeile der Objektliste erscheint eine Auswahl von Objekten bzw. ein Dialogfenster für die Festlegung des Objekts. Damit und mit Ausschneiden und Einfügen läßt sich bequem die Objektliste bearbeiten und umordnen. Auch andere Objektlisten lassen sich aus ihr zusammenstellen.

6.8.3 Objekte

Als Objekte vorgesehen sind Kugelumriß, Koordinatensystem (bis zu 8 Längen- und 5 Breitenkreise je Halbkugel), Pole, Äquator, Mittelpunkt, Kugelpunkt (mit und ohne Radius zu ihm). Zu zwei Punkten sind Großkreis, Halbkreis, kürzeste und längste Verbindung möglich. Weitere Objekte sind Kleinkreis, Kreis zu einem Vektor, Kugeldreieck und Polardreiecke.

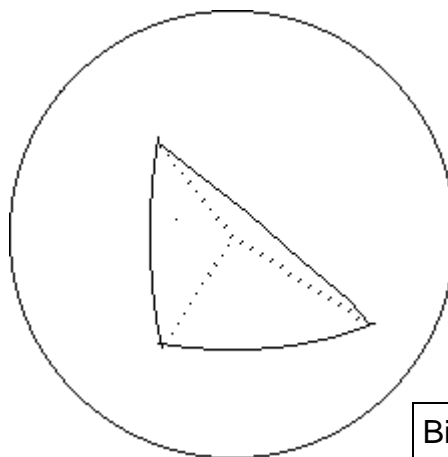


Bild 6.8.2

Die in einem Dialogfenster eingegebenen Bestimmungsgrößen werden überprüft, Fehler werden gemeldet. Namen für die Objekte sind im Programm KUGEL nicht vorgesehen.

6.8.4 Fenster

Auch die Sichtrichtungen für die drei Fenster werden im Dialog als geographische Koordinaten eingegeben. Sie lassen sich stufenlos verkleinern und verschieben. Feste Verkleinerungsstufen erlauben zwei oder drei Bilder nebeneinander oder untereinander darzustellen.

6.8.5 Film

Mehrere gespeicherte Bilder lassen sich über die GEM-Applikation Output der Reihe nach zeigen, entweder auf Tastendruck oder automatisch. Passende Bilderlisten kann man selbst zusammenstellen.

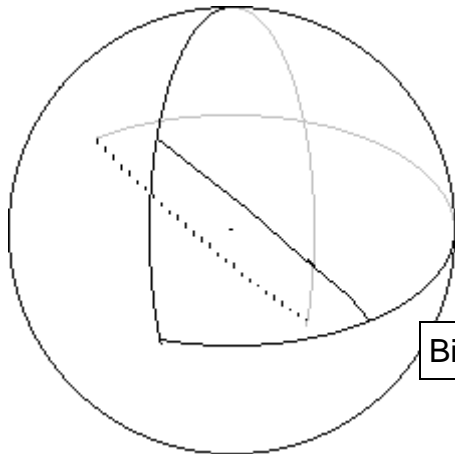


Bild 6.8.3

6.8.6 Schülerarbeit

Mit dem Programm KUGEL können die Schüler bereits am Anfang der Kugelgeometrie Erfahrungen gewinnen, wie sich Kreise als Ellipsen darstellen, wie sie zum Kugelumriß liegen und wie sie sich verändern, wenn man die Sichtrichtung ändert. Das fördert die Raumvorstellung, die Fähigkeit zum Skizzieren und die Skizzen wieder räumlich zu interpretieren. Neben der Arbeit mit der ganzen Klasse kann man auch Einzelarbeit, etwa zur Vorbereitung eines Schülerreferats anbieten.

6.8.7 Lehrerarbeit

Eine Veränderung der Blickrichtung, die einen Großkreis als Strecke erscheinen läßt, kann bei manchen Beispielen den Zusammenhang der Winkel schnell demonstrieren.

Durch die Möglichkeit, Objektlisten abzuspeichern, lassen sich auch kompliziertere Figuren vorbereiten und dann stufenweise erzeugen. So kann mehr geboten werden als mit einer einfachen Folie, wenngleich auch diese über die Druckfunktion des Programms recht bequem zu erstellen ist.

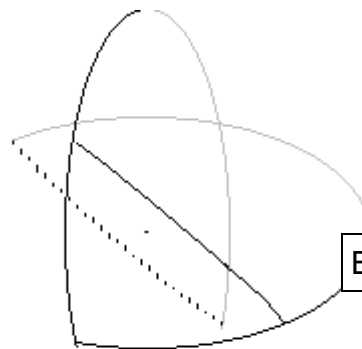


Bild 6.8.4

6.9 Figurengeometrie mit Turtle-Graphik

6.9.1 Zusammenfassung

Es gibt grundsätzlich zwei unterschiedliche Verfahren, geradlinige Figuren numerisch zu bestimmen:

- Angabe der Koordinaten von Eckpunkten, Seitenlängen und Winkeln,
- Zeichnen der Spur der Bewegung des Zeichenstiftes.

Die erste Methode geht von einer übergeordneten Sichtweise, z. B. von einem Koordinatensystem aus, der zweite Weg verlangt die Angabe des neuen Eckpunktes in seiner relativen Lage zur derzeitigen Position. Hier sollen einige Aspekte der Äquivalenz beider Verfahren an einfachen Figuren gezeigt werden.

In einem späteren Abschnitt soll gezeigt werden, daß es Figuren gibt, die nicht mehr durch die Angabe von Punkten festlegbar sind, sondern nur durch die Angabe eines Verfahrens zum Zeichnen der Spur einer Bewegung (Fraktale Kurven).

Die Schüler sollen hier nicht programmieren, sondern nur einzelne Abschnitte in einem vorbereiteten Programmgerüst, das z. B. das Einschalten des Grafikbildschirmes oder das Anlegen des Koordinatensystems übernimmt, ergänzen.

Lehrplanbezug: Regelmäßige Dreiecke, Vierecke und Vielecke ab 7. Jahrgangsstufe.

Zeitbedarf: 2 Unterrichtsstunden.

Voraussetzungen: Umgang mit dem einfachen Editor in TURBO-PASCAL oder in COMAL.

Mathematik: Koordinatensysteme, Innen- und Außenwinkelsätze, Doppelkreuzung.

Informatik: Programmcode, Compiler, Programm, EVA-Prinzip (siehe ITB).

Programm: Turbo-Pascal und TP Graf, Kühlewind - Befehlsweiterung zur einfachen Grafikprogrammierung in Turbo-Pascal 4.0/5.0/5.5 (Zentralstelle) oder COMAL

Literatur

Mathematik mit Comal-Grafik, Reinhard Mauve, Bonn 1989

Anschauliche Geometrie 1, Barth u. a. , München 1985

TP Graf - Befehlsweiterung zur einfachen Grafikprogrammierung in Turbo-Pascal, G. Kühlewind, Zentralstelle für Computer im Unterricht, Augsburg 1990

6.9.2 Programmgerüst

Um eigentlich Geometrie mit dem Rechner betreiben zu können, müssen verschiedene Teile, die zu einem lauffähigen Programm gehören, vorbereitet werden. Ein solches Programmgerüst kann folgendermaßen aussehen:

```
PROGRAM programmname;
uses TP Graf
{G.Kühlewind, Gymnasium Berch-
tesgaden, 30.05.90 }

BEGIN
{Hauptprogramm}

    GrafikEin;
    DefKartWelt(-0.6,-0.6,14,
        NOT mittig);
    Raster(0.5, 0.5);
    Achsen('x', 'y');
    gotoxy((6,25); wri-
        te('Taste drücken !');

    warten;
    GrafikAus;

END.
```

Die klassische euklidische Geometrie kommt ohne Koordinatensystem aus. Punkte müssen am Bildschirm jedoch durch einen Bildschirmpunkt, die Anzahl dieser Punkte bestimmt ja auch die Darstellungsgenauigkeit, dargestellt werden. Besser als das Rechnen in Bildschirmkoordinaten ist die Verwendung eines Koordinatensystems (x -Achse, y -Achse, Ursprung O) mit einer Zentimeterskalierung.

Dies wird von der Prozedur `DefKartWelt`, `Raster` Achsen übernommen.

6.9.3 Turtle-Anweisungen

`SetHeading(Winkel : real)` oder `Setheading(Orientierung)`

mit der Eintragung eines Winkels im Bereich $[0^\circ, 360^\circ]$ bzw. den Himmelsrichtungen Nord, Ost, Süd, West;

z. B. : `SetHeading(45)` \Rightarrow Turtle bewegt sich in Richtung der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten,

`SetHeading(Nord)` \Rightarrow Turtle dreht sich in Richtung Nord, entspricht `SetHeading(90)`.

`SetPosition(x, y : real)` bewegt die Turtle zum Punkt $P(x|y)$, z. B. `SetPosition(3,1)` bewegt die Turtle zum Punkt $P(3|1)$ im Koordinatensystem am Bildschirm.

`SetPenColor(Farbe : integer)` setzt die Farbe der Spur mit folgender Farbtabelle: schwarz = 0, blau = 1; grün = 2, cyan = 3, rot = 4, gelb = 14, weiß 15
`PenDown - PenUp`

`ForWd(Distanz : real)` bzw.

`Back(Distanz : real)` bewegt die Turtle um die Distanz in den Einheiten des Koordinatensystems vor- bzw. rückwärts in Richtung der momentane Turtle-Richtung

z. B. `ForWd(6)`

`TurnLeft((Winkel : real);` bzw. `TurnRight(Winkel : real)`

z. B. `TurnLeft(45)` bewirkt eine Drehung der Turtle im mathematisch positiven Sinn (gegen die Uhrzeigerbewegung) um einen Winkel von 45° .

6.9.4 Geometrische Elemente mit Turtle-Graphik

Strecke: Bei einer Geometrie, die auf das Zeichnen von Spuren beruht, gibt es eigentlich keine Punkte. Die Turtle bewegt sich zwar zu einem Punkt im Koordinatensystem hinterläßt aber erst bei ihrer Bewegung diese Spur. Das Grundelement ist hier die Bewegung der Turtle von einem Punkt um eine bestimmte Distanz. Die Strecke $[AB]$ der Länge s wird hier also festgelegt durch die Anweisungsfolge:

```
SetHeading(Orientierung)
SetPosition(ax, ay)
ForWd(s)
```

Beispiel 1: Zeichne die Strecke $[AB]$ mit $A(1|1)$ und $B(1|6) \Rightarrow s = 5$ cm.

```
PROGRAM Strecke;
uses TP Graf
{G.Kühlewind, Gymnasium Berchtesgaden, 30.05.90}
```

```
BEGIN
{Hauptprogramm}

    GrafikEin;
    DefKartWelt(-0.6, -0.6, 14,
                NOT mittig);
    Raster(0.5, 0.5);
    Achsen('x', 'y');
    gotoxy((6,25); write('Taste drücken !');
(* -----*)
    SetHeading(Nord);
    SetPosition(1 ;1);
    ForWd(5);
(* -----*)
    warten;
    GrafikAus;
END.
```

Beispiel 2: Zeichne die Strecke $[AB]$ mit $A(1|1)$ und $B(2|6) \Rightarrow s$ läßt sich nur mit

Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen. Die Streckenlänge muß also für die Turtle-Grafik vorher bekannt sein.

Winkel: Ein Winkel wird durch die Lage des ersten Schenkels und durch das Winkelmaß bestimmt. Der erste Schenkel wird im Koordinatensystem durch seine Lage relativ zu den Achsen gezeichnet.

Beispiel: Winkel (ASB) mit S(1| 1), A(6| 1) und Winkelmaß 60°.

Der Eintrag in das Programmgerüst lautet

```
(* -----*)
    SetPosition(6 ;1);
    SetHeading(180);
    ForWd(5);
    TurnRight(120);
    ForWd(5);
```

```
(* -----*)
```

Verwendet wird hier der Nebenwinkelsatz, denn die Turtle muß sich um den Winkel von 120° nach rechts drehen. Genauso könnte man natürlich eine Drehung nach links um den Winkel $360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$ ausführen lassen.

6.9.5 Einfache geometrische Figuren mit Turtle-Grafik

Aufgabe: Zeichne ein gleichseitiges Dreieck mit dem Punkt A(1| 1) und der Seitenlänge $s = 6$ cm.

```
(* -----*)
    SetHeading(0);
    SetPosition(1 ;1);
    ForWd(6);
    TurnLeft(120);
    ForWd(5);
    TurnLeft(120);
    ForWd(6);
    TurnLeft(120);
```

```
(* -----*)
```

Der bei den Drehungen überstrichene Winkel ist jeweils der Außenwinkel. Die Turtle schaut am Ende der Bewegung wieder in die gleiche Richtung wie am Anfang. Hiermit läßt sich leicht der Satz

über die Summe der Außenwinkel motivieren.

Aufgabe: Zeichne ein Dreieck ABC mit A(1| 1), der Seite $c = 5$ cm, $b = 53,15^\circ$ und $g = 90^\circ$. Versuche durch Probieren herauszufinden wie lang die Seite b sein muß, daß eine geschlossene Figur entsteht. Wie groß ist dann der Winkel a ?

Hinweise: Dazu führt man am besten die Drehung um den vermuteten Außenwinkel aus und läßt nochmals die Strecke c zeichnen. Mit SetPenColor kann man vorher noch zur Verdeutlichung die Zeichenfarbe ändern. Wenn diese mit der vorhandenen Dreiecksseite zusammenfällt, war deine Vermutung wahrscheinlich richtig.

```
(* -----*)
    SetHeading(0);
    SetPosition(1 ;1);
    ForWd(5);
    TurnLeft(126.85);
    ForWd(3);
    TurnLeft(90);
    ForWd(4);
    SetPenColor(14);
    TurnLeft(143.13);
    ForWd(5);
```

```
(* -----*)
```

6.9.6 Weitere Aufgaben

- 1) Seite $a = 4$ cm $\Rightarrow b = 3$ cm.
- 2) Ändern der Winkelgröße b .
- 3) Verwendung anderer pythagoräischer Zahlentripel als Seitenlängen.

Aufgabe: Zeichne ein Parallelogramm ABCD mit A(1| 1) und den Seitenlängen $a = 6$ cm, $b = 4$ cm und $\alpha = 45^\circ$.

```
(* -----*)
    SetHeading(0);
    SetPosition(1 ; 1)
    ForWd(6);
    TurnLeft(135);
    ForWd(4);
    TurnLeft(45);
    ForWd(6);
    TurnLeft(135);
```

```

    ForWd(4);
  (* ----- *)
Aufgabe: Zeichne ein regelmäßiges
6-Eck mit der Seitenlänge  $s = 5$  cm.
Einführung einer Prozedur n_eck, die
das regelmäßige  $n$ -Eck zeichnet.

```

Berechnung der Innenwinkel: Innenwinkelgröße $180 - 360/n$

```

  (* ----- *)
Procedure n_eck(ezahl : integer;
               seite : real);
  VAR i : integer;
      winkel : real ;
BEGIN
  winkel := 180 - 360/ezahl;
  FOR i := 1 TO ezahl DO
    BEGIN
      ForWd(seite);
      TurnLeft(180
              -winkel);
    END
  END;
  (* ----- *)

```

Aufruf der Prozedur für das regelmäßige 6-Eck: `n_eck(6,5)`.

6.9.7 Weitere Programme

6.9.7.1 Gleichseitiges Dreieck 1

```

PROGRAM Gleichseitiges_
        Dreieck1;
uses TPGräf;
{G. Kühlewind, Gymnasium
Berchtesgaden, 30.05.90}

VAR Seite, Orientierung: real;

BEGIN

  Grafikein;
  DefKartWelt(-0.6,-0.6,14,
              NOT mittig);
  Raster(0.5, 0.5);
  Achsen('x', 'y');
  gotoxy(6,25); write('Taste
                    drücken !');
  (* ----- *)
  Orientierung:=Ost;
  SetPosition(1,1);
  SetHeading(Orientierung);

```

```

  (* ----- *)
  {gleichseitiges Dreieck mit
  der Seitenlänge 6cm}

```

```

  seite:=6;
  ForWD(6);
  TurnLeft(120);
  ForWD(6);
  TurnLeft(120);
  ForWD(6);

```

```

  (* ----- *)
  SetHeading(Orientierung);
  warten;
  GrafikAus;
END.

```

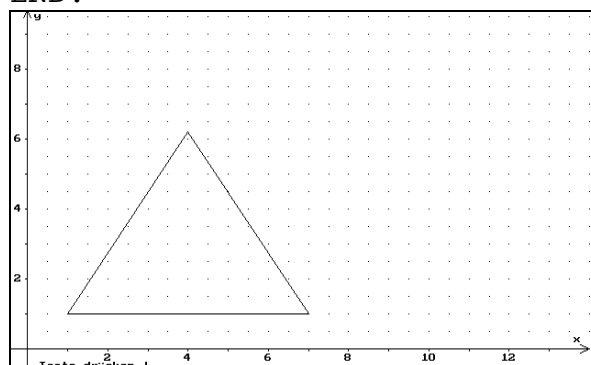


Bild 6.9.1

6.9.7.2 Gleichseitiges Dreieck 2

```

PROGRAM
Gleichseitiges_Dreieck2;
uses TPGräf;
{G. Kühlewind, Gymnasium
Berchtesgaden, 30.05.90}

VAR a , Orientierung : real;

Procedure dreieck(a:real);
{gleichseitiges Dreieck mit
  der Seitenlänge a = 6cm}

  BEGIN
    ForWD(a);
    TurnLeft(120);
    ForWD(a);
    TurnLeft(120);
    ForWD(a);
  End;

BEGIN

  Grafikein;

```

```

DefKartWelt(-0.6,-0.6,14,
            NOT mittig);
Raster(0.5, 0.5);
Achsen('x', 'y');
gotoxy(6,25); write('Taste
                    drücken !');
(*-----*)
Orientierung:=Ost;
SetPosition(1,1);
SetHeading(Orientierung);

(*-----*)
dreieck(2);
SetHeading(Orientierung);
dreieck(3);

(*-----*)
SetHeading(Orientierung);
warten;
GrafikAus;
END.
  
```

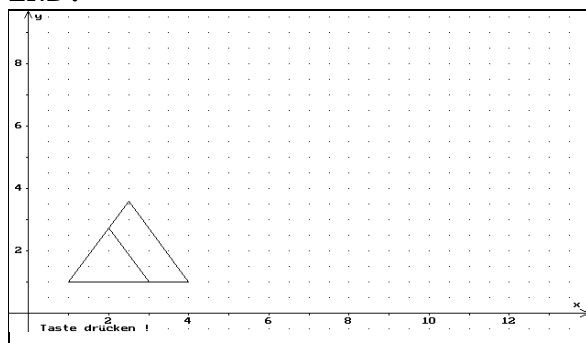


Bild 6.9.2

6.9.7.3 Dreiecksfiguren

```

PROGRAM Dreiecksfiguren;
uses TPGräf;
{G. Kühlewind, Gymnasium
Berchtesgaden, 30.05.90}

VAR a , Orientierung : real;
    i : integer;

Procedure dreieck(a:real);
{gleichseitiges Dreieck mit
  der Seitenlänge a = 6cm}

  Begin
    ForWD(a);
    TurnLeft(120);
    ForWD(a);
    TurnLeft(120);
    ForWD(a);
  
```

```

    TurnLeft(120)
  End;
BEGIN
  GrafikEin;
  DefKartWelt(-0.6,-0.6,14,
            NOT mittig);
  Raster(0.5, 0.5);
  Achsen('x', 'y');
  gotoxy(6,25); write('Taste
                    drücken !');

  (*-----*)
  Orientierung:=Ost;
  SetPosition(3,1);
  SetHeading(Orientierung);

  (*-----*)
  FOR i := 1 TO 6 DO
    BEGIN
      dreieck(3);
      PenUp;
      ForWD(3);
      PenDown;
      TurnLeft(60);
    END;

  (*-----*)
  SetHeading(Orientierung);
  warten;
  GrafikAus;
END.
  
```

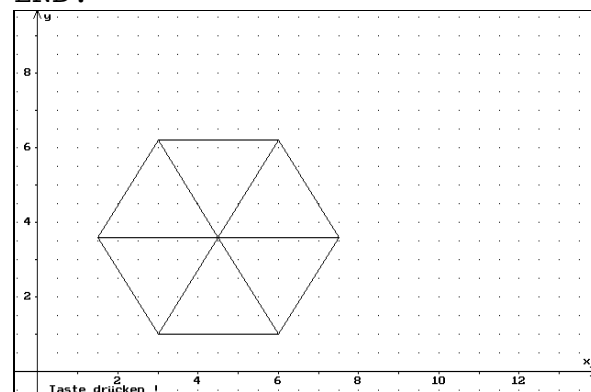


Bild 6.9.3

6.9.7.4 Parallelogramm

```

PROGRAM Parallelogramm;
uses TPGräf;
{G. Kühlewind, Gymnasium
Berchtesgaden, 30.05.90}

VAR a,b,Orientierung : real;
  
```

```
BEGIN
  Grafikein;
  DefKartWelt(-0.6,-0.6,14,
    NOT mittig);
  Raster(0.5, 0.5);
  Achsen('x','y');
  gotoxy(6,25); write('Taste
    drücken !');
  (*-----*)
  Orientierung:=Ost;
  SetPosition(3,3);
  SetHeading(Orientierung);
  (*-----*)
  {Parallelogramm Seitenlänge
  a=6cm, b=4cm, alpha=45grad}
  a:=6; b:=4;
  ForWD(a);
  TurnLeft(135);
  ForWD(b);
  TurnLeft(45);
  ForWD(a);
  TurnLeft(135);
  ForWD(b);
  (*-----*)
  SetHeading(Orientierung);
  warten;
  GrafikAus;
END.
```

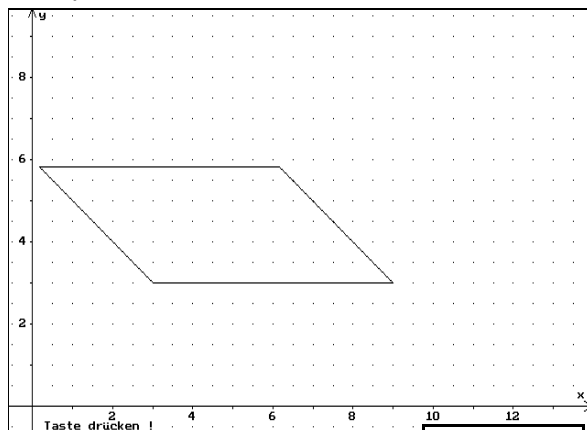


Bild 6.9.4

6.9.7.5 Regelmäßiges n-Eck

```
PROGRAM Regelmäßiges_N_Eck;
uses TPgraf;
{G. Kühlewind, Gymnasium
Berchtesgaden, 30.05.90}
```

```
VAR a , Orientierung : real;
      n : integer;
```

```
(*-----*)
Procedure n_eck(ezahl:integer;
  seite:real);
  Var i      : integer;
      winkel : real;

  BEGIN
    winkel:= 180-360/ezahl;
    FOR i:=1 to ezahl do
      BEGIN
        ForWD(seite);
        TurnLeft(180
          -winkel)
      END
    END;
  END;
  (*-----*)
BEGIN
  Grafikein;
  DefKartWelt(-0.6,-0.6,14,
    NOT mittig);
  Raster(0.5, 0.5);
  Achsen('x','y');
  gotoxy(6,25); write('Taste
    drücken !');

  (*-----*)
  Orientierung:=Ost;
  SetPosition(4,1);
  SetHeading(Orientierung);

  (*-----*)
  n := 6;
  a := 4;
  n_eck(n,a);

  (*-----*)
  SetHeading(Orientierung);
  warten;
  GrafikAus;
END.
```

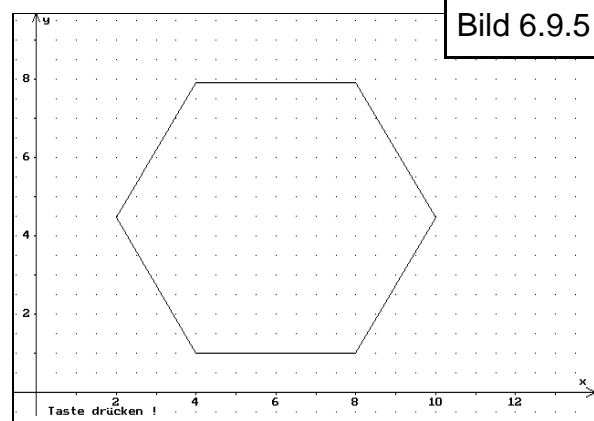


Bild 6.9.5

6.10 Geometrie mit Rechenblättern

6.10.1 Allgemeines

Geometrische Figuren können im Koordinatensystem durch Angabe der Koordinaten ihrer Punkte definiert werden. Geometrische Abbildungen dieser Figuren wie Spiegelung an einer Achse oder Drehung um einen Punkt bestehen aus der Zuordnung von Ur- zu Bildpunkten. Eine solche Zuordnung läßt sich algebraisch durch Gleichungen zwischen den Koordinaten eines Ursprungs- und seines Bildpunkts beschreiben; aus den Koordinaten der Ursprungs- werden die der Bildpunkte berechnet.

Bei vielen Tabellenkalkulationsprogrammen lassen sich die im Rechenblatt ermittelten Zahlenwerte in einem Diagramm graphisch darstellen. Bei einer Änderung der Zahlenwerte wird dann automatisch die entsprechende Änderung des zugehörigen Diagramms ausgeführt. Diese Koppelung von algebraischer und graphischer Darstellung läßt sich auch bei geometrischen Abbildungen methodisch günstig nutzen. In einem Rechenblatt werden die Koordinaten der Ursprungs- eingegeben und daraus die Bildpunkte errechnet; aus beiden Punktmengen ergeben sich dann im Koordinatensystem die entsprechenden Figuren als Streckenzug.

In einem solchen Rechenblatt können nun die Eingabedaten in weiten Grenzen variiert werden. Da das gesamte Rechenblatt und die Zeichnung jeweils automatisch aktualisiert wird, ist die Auswirkung von Änderungen der Ursprungs- auf die Bildfigur sofort sichtbar. Entsprechend können Abbildungsparameter variiert und ihre geometrische Auswirkung beobachtet werden. So können ganze Klassen von Figuren wesentlich

schneller untersucht werden, als dies z. B. mit manueller Kreidezeichnung oder fertigen Zeichnungen auf Folien möglich ist. Dies verschafft einen anschaulichen Überblick über Eigenschaften der Abbildung. Insbesondere können auch Spezialfälle untersucht werden.

6.10.2 Erstellen des Rechenblatts

Zur Durchführung der Abbildung eignen sich verschiedene Tabellenkalkulationsprogramme, z. B. MS-Works (für DOS sowie für Windows), QuattroPro, Excel, aber auch Vivitab bzw. Mathelab. Im folgenden soll die Achsenspiegelung eines Dreiecks an einer Ursprungsgeraden mit dem integrierten Paket MS-Works (für DOS) exemplarisch gezeigt werden.

Beim Entwurf des Rechenblatts muß eine Anordnung der Koordinaten gewählt werden, die dann im Diagramm eine Zusammenfassung zu einer Figur erlaubt. Die x - bzw. y -Koordinaten der Ursprungs- werden dazu in zwei senkrechten Spalten nebeneinandergestellt. Um den Streckenzug zu einer Figur (Dreieck) zu schließen, müssen die Koordinaten des Anfangspunkts am Ende wiederholt werden. Die Koordinaten der Bildpunkte folgen in den gleichen Spalten, allerdings jeweils als Ergebnis der Abbildungsformel. Da die Module Diagrammerstellung i. a. zwar mehrere y -Datenreihen, aber nur eine x -Datenreihe kennen, müssen die x -Koordinaten aller Punkte in einer Spalte stehen. Um den Streckenzug zwischen Ur- und Bildfigur zu unterbrechen, muß mindestens eine Leerzeile eingeschoben sein.

6.10.3 Rechenblatt mit Ansicht der Daten

<u>Spiegelung eines Dreiecks an einer Ursprungsgeraden</u>			
Gleichung der Spiegelachse			
y =	1	x	
Steigungswinkel der Geraden			
β:	45	°	(0,) 8
Urdreieck			
A	(-4	0)
B	(1	2)
C	(-1	4)
A	(-4	0)
Bilddreieck			
A'	(0	-4)
B'	(2	1)
C'	(4	-1)
A'	(0	-4)

6.10.4 Rechenblatt mit Ansicht der Formeln

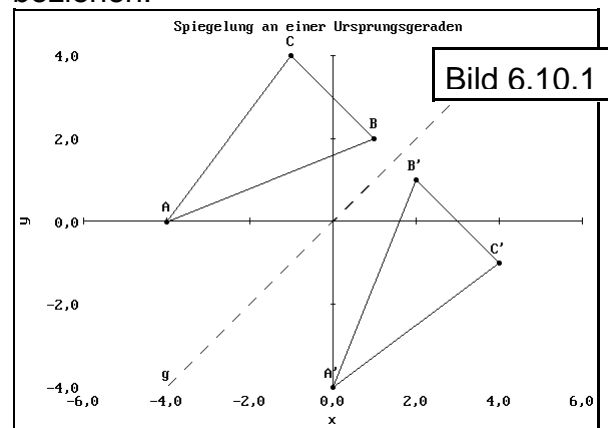
<u>Spiegelung eines Dreiecks an einer Ursprungsgeraden</u>			
Gleichung der Spiegelachse			
y =		1	x
Steigungswinkel der Geraden			
β		°	(=ARCTAN(\$m))
=ARCTAN(\$m)/PI()*180			
Urdreieck			
A	(-5	1)
B	(1	2)
C	(-1	4)
A	(=\$xA	=\$yA)
Bilddreieck			
A	(=COS(2*\$beta)*xA+SIN(2*\$beta)*yA	=SIN(2*\$beta)*xA-COS(2*\$beta)*yA)
B	(=COS(2*\$beta)*xB+	=SIN(2*\$b

	SIN(2*\$beta)*yB		eta)*xB-COS(2*\$beta)*yB)
C	(=COS(2*\$beta)*xC+SIN(2*\$beta)*yC		=SIN(2*\$beta)*xC-COS(2*\$beta)*yC)
A	(=Z(-3)S		=Z(-3)S)

6.10.5 Definition des Diagramms

Zur Darstellung der Figuren ist die Diagrammart Punktdiagramm (bzw. xy-Diagramm bei Quattro Pro) zu wählen. Nur so werden die Punkte in einem zweidimensionalen Koordinatensystem lagerichtig gezeichnet.

Die Skalierung der Achsen sollte manuell erfolgen, damit das Verhältnis der Achsen richtig bestimmt und eine Verzerrung der Figuren vermieden wird. Damit sind die Wertebereiche für die Punkte festgelegt. Beschriftung der Punkte und des Koordinatensystems und evtl. farbige Kennzeichnung der Strecken vervollständigen die Darstellung. Hilfspunkte oder -linien (z. B. Spiegelachse oder Drehpunkt) können entsprechend eingebunden werden. Bei der Definition weiterer y-Datenreihen ist zu beachten, daß auch diese sich auf die schon festgelegte x-Datenreihe beziehen.



Analog lassen sich Rechenblätter für andere Abbildungen wie Spiegelung an beliebigen Achsen, Drehung, Parallelverschiebung, Punktspiegelung, Zentrische Streckung, Scherung oder affine Abbildungen erstellen. Auch können in einem entsprechenden Rechenblatt mehrere nacheinander ausgeführte Abbildungen berechnet werden. Manche Programme ermöglichen es, Rechenblätter für einzelne Abbildungen zu verknüpfen und auf diese Weise Abbildungen (evtl. in unterschiedlicher Reihenfolge) hintereinander auszuführen. Selbstverständlich können auch komplexere Figuren abgebildet werden, die allerdings als Streckenzüge zwischen endlich vielen Punkten dargestellt sein müssen.

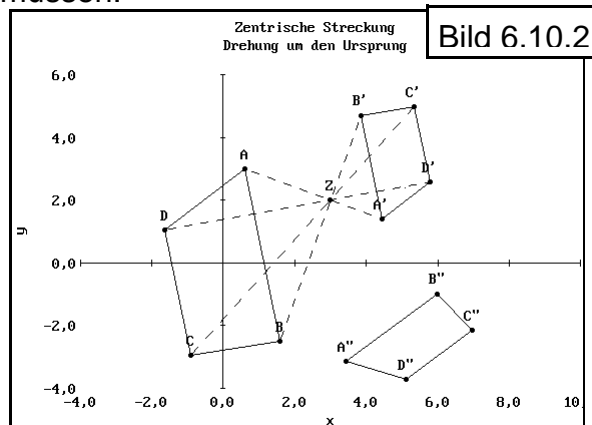


Bild 6.10.2

6.10.6 Methodische und didaktische Aspekte

Im Unterricht eignen sich solche Rechenblätter zur Demonstration durch den Lehrer (JgSt. 7, RS; JgSt. 9, Gymn), besonders aber für die Hand des Schülers. Beim Einsatz fertiger Rechenblätter sollten diese gegen Eingabe geschützt sein - ausgenommen die vorgesehenen Eingabefelder. Verfügen die Schüler über Kenntnisse der Abbildungsgleichungen (sowie gewisse Fertigkeit im Umgang mit dem Tabellenkalkulationsprogramm), so können die Rechenblätter im Unterricht erstellt oder abgeändert werden (JgSt. 10, RS).

Um z. B. die Untersuchung von Abbildungen zu unterstützen, werden die Eingabedaten für die Ursprünge sowie Abbildungsparameter variiert - im vorliegenden Beispiel die Steigung der Spiegelachse. Dabei ist es besonders günstig, wenn Rechenblatt und zugehörige Zeichnung gleichzeitig (in zwei Fenstern) am Bildschirm sichtbar sind. Dies ist z. B. mit Windows-Produkten wie Works für Windows oder Excel möglich.

Systematisches Variieren kann durch Eingabe ausgewählter Werte oder durch automatische Abfolge einer Serie von Werten erfolgen. Hierzu wird in das Feld für den Parameter günstigerweise eine Formel mit Bezug auf sich selbst geschrieben, z. B.: in die Zelle mit dem Namen m (für Steigung) die Formel $=\$m+1$. Dadurch wird bei jedem neuen Durchrechnen des Rechenblatts (mit [F9]) der Wert für m um 1 erhöht. Dieses Inkrement kann statt in der Formel auch in einer weiteren Zelle stehen, auf die sich die Formel dann beziehen muß, und kann dort geändert werden. So kann durch die filmartige Abfolge der Einzelbilder ein dynamischer Effekt erzielt werden, der die Anschauung in besonderem Maße unterstützt.

Für eine systematische Untersuchung eignen sich u. a. Themen wie Annäherung von Punkten an Fixpunkte oder Fixgeraden, Untersuchung von Figuren auf Symmetrie bzw. Kongruenz oder Ähnlichkeit, Äquivalenz von verknüpften Abbildungen, Einbeschreibungsaufgaben.

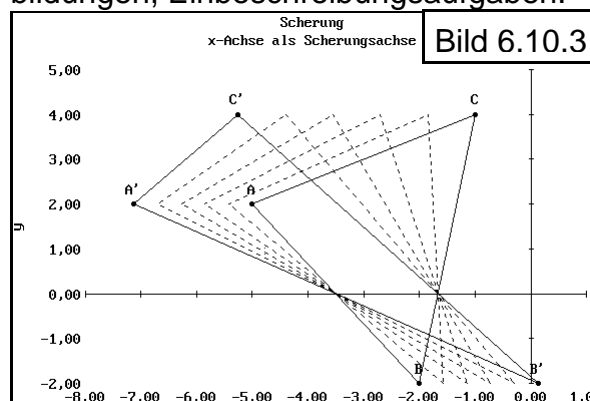


Bild 6.10.3

6.11 Kugelvolumen und Pyramidenvolumen

6.11.1 Ziel

Durch eine äquidistante Teilung des Kugelradius in n Teile ($n \in \mathbb{N}$) wird eine Kugel bzw. eine Halbkugel in n Schichten in Form zylindrischer Kreisscheiben zerlegt. Durch die Summe der Volumina dieser umbeschriebenen bzw. einbeschriebenen zylindrischen Kreisscheiben wird das Volumen der Kugel (Halbkugel) von oben bzw. von unten angenähert. Durch diese Methode soll ein geschlossener Ausdruck für das Kugelvolumen erhalten werden:

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Lehrplan: Jahrgangsstufe 9 (WPfGr I, RS)

Voraussetzungen: Satz des Pythagoras

Zeitbedarf: 2 Unterrichtsstunden

Die Methode, das Kugelvolumen mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips über (die vorher erarbeiteten) Volumina von Kreiskegel und Zylinder herzuleiten, ist ohne Zweifel sehr elegant. Nachteilig ist, daß Schüler wohl von sich aus nicht auf diesen Weg kommen werden.

Das Verfahren, das Kugelvolumen mit Hilfe des Rechners über die um- und einbeschriebenen zylindrischen Kreisscheiben zu bestimmen, wird Schülern möglicherweise einfacher und durchsichtiger erscheinen, weil die erforderlichen Überlegungen von Anfang an genau an dem Körper angestellt werden, dessen Volumen auch ermittelt werden soll. Dazu scheint es sinnvoll, den gekrümmten Umriß der Kugel zur näherungsweise Berechnung des Volumens durch geradlinige Elemente darzustellen. Dazu bietet sich eine Schichtung mit zylindrischen Kreisscheiben an, durch die das Volumen der (Halb-) Kugel von außen bzw. von innen mit zunehmender

Anzahl der (äquidistanten) Teilungen immer besser angenähert wird.

Außerdem bekommt man ein richtiges Gefühl dafür, daß der so gewonnene Näherungswert um so besser wird, je größer man die Anzahl der äquidistanten Teilungen wählt, und daß man den exakten Wert erhält, wenn man (theoretisch) die Anzahl der Teilungen gegen unendlich gehen läßt.

Darüberhinaus ist es durchaus sinnvoll, sich auch in der Realschule (S I) an einigen ausgewählten und dafür geeigneten Stellen mit Näherungsverfahren auseinanderzusetzen. Derartige „raffinierte“ Methoden, ein Problem in den Griff zu bekommen, sind faszinierend und aus diesem Grund auch außerordentlich motivierend. Daneben spielt die exemplarische Behandlung und Einsicht in Näherungsverfahren unter Verwendung des Rechners als methodisches Hilfsmittel im Mathematikunterricht zunehmend eine bedeutsame Rolle.

Hat man einige Zeit vorher im Unterricht die näherungsweise Bestimmung der Kreiszahl π mit der analogen Methode „Annäherung der Viertel-Kreisfläche durch um- bzw. einbeschriebene äquidistante Rechteckstreifen“ durchgeführt, so ist der Boden schon bereitet und es werden sich, außer daß die Überlegungen jetzt dreidimensional gedacht werden müssen, keine größeren Probleme ergeben.

6.11.2 Mögliche Erarbeitung im Unterricht

- a) Behandlung für umbeschriebene zylindrische Kreisscheiben; Erarbeitung der Summenformel für den Fall $n = 5$:

Mit Hilfe von Skizzen werden erarbeitet:

- Eine äquidistante Teilung des Radius ist sinnvoll

- Kugelvolumen = 2 • Summe der Volumina aller Kreisscheiben
- gleiche Höhe $h = r/n$ ($= r/5$) der Kreiszylinder
- Abhängigkeit des Radius R_i ($i := 0; \dots; n-1$) von der Nummer i der Kreisscheibe

Summenformel:

$$V_{\text{Kugel}} = 2 \left[R_0^2 \pi h + R_1^2 \pi h + \dots + R_4^2 \pi h \right]$$

$$V_{\text{Kugel}} = 2\pi \frac{r}{5} r^2 \left[\left(1 - \frac{0^2}{5^2}\right) + \left(1 - \frac{1^2}{5^2}\right) + \dots + \left(1 - \frac{4^2}{5^2}\right) \right]$$

$$V_{\text{Kugel}} = 2\pi r^3 \left[1 - \frac{0^2+1^2+2^2+3^2+4^2}{5^3} \right]$$

Bestimmung des Bruchterms und des Kugelvolumens für diesen Fall ($n = 5$).

- b) Erarbeitung der Tatsache, daß das Kugelvolumen um so genauer angenähert wird, je größer die Anzahl der (umbeschriebenen) zylindrischen Kreisscheiben gewählt wird.

Eventuell Unterstützung der Anschauung durch zusätzliche Zeichnungen oder durch ein Programm, welches diese „bessere“ Annäherung für zunehmendes n graphisch zeigt (z. B. Programm: Pyramide, Kugel).

- c) Übergang vom speziellen Fall $n = 5$ zum allgemeinen Fall: Erarbeitung der für die Summenformel erforderlichen Änderungen. Hier wird es angebracht sein, durch Zwischenschaltung weiterer spezieller Fälle (z. B. $n = 6$; $n = 10$; $n = \dots$) den allgemeinen Fall behutsam anzusteuern.

Erkenntnis:

$$\text{Letzter Summand} \quad \longrightarrow (n-1)^2$$

$$\text{Nenner} \quad \longrightarrow n^3$$

Allgemeiner Fall:

$$V_{\text{Kugel,um}} = 2\pi r^3 \left[1 - \frac{0^2+1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2}{n^3} \right]$$

- d) Problem: Aufsummieren der (unendlich) vielen Summanden im Zähler

des Bruchterms bzw. Berechnung des Klammerterms.

Rechner als Hilfsmittel

- 1.) Erarbeitung des Algorithmus oder
- 2.) Einsatz eines Werkzeugs, z. B. derive, Vivitab,

Berechnung des Klammerterms für $n = 10$; 100; 200; 500; 1000; 10000; Für wachsendes n strebt der Klammerterm gegen den Wert $\frac{2}{3}$.

- e) Es werden die gleichen Überlegungen für den Fall einbeschriebener zylindrischer Kreisscheiben durchgeführt.

Erarbeitung der Summenformel für diesen Fall:

$$V_{\text{Kugel,um}} = 2\pi r^3 \left[1 - \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2}{n^3} - \frac{1}{n} \right]$$

Erkenntnis: Für alle n gilt

$$V_{\text{Kugel,ein}} < V_{\text{Kugel}} < V_{\text{Kugel,um}}$$

$$V_{\text{Kugel,um}} - V_{\text{Kugel,ein}} = \frac{1}{n}$$

Dieses Verfahren stellt eine Intervallschachtelung für das Kugelvolumen dar und liefert für ein über alle Grenzen wachsendes n das Kugelvolumen.

Berechnung der beiden Klammerterme

$$\left[1 - \frac{0^2+1^2+\dots+(n-1)^2}{n^3} \right] \text{ und } \left[1 - \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2}{n^3} - \frac{1}{n} \right]$$

für wachsendes n mit Hilfe

- a) eines im Unterricht erarbeiteten Algorithmus, wobei das Programm den Schülern zur Verfügung gestellt werden kann,
- b) eines Werkzeugs, z. B. derive, Vivitab.

Intervallschachtelung für die Zahl $\frac{2}{3}$

- f) Zusammenfassung: Kugelvolumen

$$V_{\text{Kugel}} = 2\pi r^3 \cdot \frac{2}{3}$$

Zusatzinformation: Für die Summe der
Quadratzahlen von 1 bis n gilt bekannt-
lich der geschlossene Ausdruck

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{1}{6} (n-1) n (2n-1).$$

(Beweis durch vollständige Induktion)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} i^2}{n^3} = \frac{1}{3}$$

Angenähertes Kugelvolumen $V_{\text{Kugel},u}$
(umbeschriebene zylindrische Kreis-
scheiben) für

$n = 5$:

$$V_5 = 2\pi r^3 \left[1 - \frac{0^2+1^2+2^2+3^2+4^2}{5^3} \right]$$

$n = 6$:

$$V_6 = 2\pi r^3 \left[1 - \frac{0^2+1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{6^3} \right]$$

$n = 10$:

$$V_{10} = 2\pi r^3 \left[1 - \frac{0^2+1^2+2^2+3^2+\dots+9^2}{10^3} \right]$$

$n = k$:

$$V_k = 2\pi r^3 \left[1 - \frac{0^2+1^2+2^2+3^2+\dots+(k-1)^2}{k^3} \right]$$

Erkenntnis:

$$V_{\text{Kugel}} = 2\pi r^3 \left[1 - \frac{0^2+1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2}{n^3} \right]$$

Programm zur Bestimmung der Klammerterme $T_u(n)$ und $T_e(n)$:

```
rem Quick-BASIC
cls
print "Anzahl Teilungen
n";tab(20);"Tu(n)";tab(40);"Te(n)";tab(60);"Differenz"
let n = 10
while n <= 1000000
  let summe# = 0
  for zaehler = 0 to n-1
    let summe# = summe# + zaehler*zaehler
  next zaehler
  let klammer1# = 1 - (summe# / (n*n*n))
  let klammer2# = 1 - (summe# / (n*n*n)) - (1/n)
  print n;tab(20);klammer1#;tab(40);klammer2#;tab(60);1/n
  let n = n*10
wend
end
```

Bild 6.11.1

Intervallschachtelung mit Programm derive

n	$T_u(n) = 1 - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} i^2}{n^3}$	$T_e(n) = 1 - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} i^2}{n^3} - \frac{1}{n}$
10	0,715	0,615
100	0,67165	0,661650
1.000	0,6671665	0,66616649
10 000	0,66671666	0,66661666
100 000	0,66667166	0,66666166
1 000 000	0,66666716	0,66666666
10 000 000	0,66666671	0,66666666
100 000 000	0,66666667	0,66666666
1 000 000 000	0,66666666	0,66666666
10^{15}	0,6666666666666667166	0,666666666666666666
10^{18}	0,6666666666666666667	0,666666666666666666
$\rightarrow \infty$	<u>2</u>	<u>2</u>

Bild 6.11.2

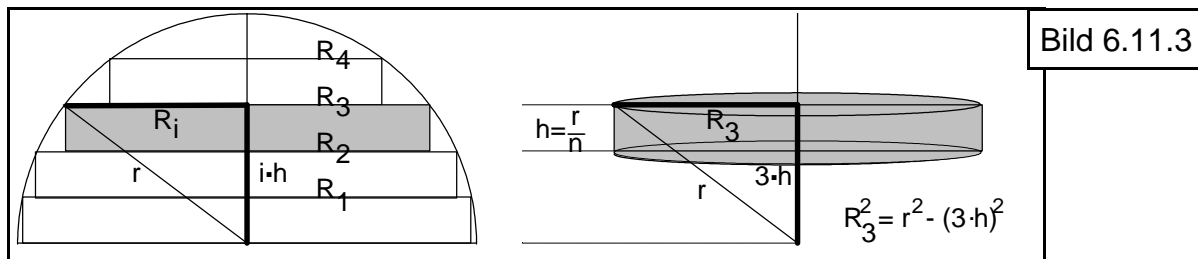


Bild 6.11.3

6.11.3 Näherung für das Kugelvolumen über einbeschriebene zylindrische Kreisscheiben (Bild 6.11.3)

Anzahl der Kreisscheiben (-zylinder): n
Radius der i -ten Kreisscheibe:

R_i mit i von 1 bis n

$$R_i^2 = r^2 - (i \cdot h)^2$$

$$R_i^2 = r^2 - (i \cdot \frac{r}{n})^2$$

$$R_i^2 = r^2 \cdot (1 - \frac{i^2}{n^2})$$

Da der Radius R_i der i -ten Kreisscheibe für $i = n$ Null wird, genügt es, i von 1 bis $n-1$ laufen zu lassen.

$$V_{i,Kugel} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \pi \cdot R_i^2 \cdot h$$

$$V_{i,Kugel} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{r^3}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (1 - \frac{i^2}{n^2})$$

$$V_{i,Kugel} = 2 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot$$

$$\left[1 - \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2}{n^3} - \frac{1}{n} \right]$$

6.11.4 Näherung für das Kugelvolumen über umbeschriebene zylindrische Kreisscheiben (Bild 6.11.4)

Anzahl der Kreisscheiben (-zylinder): n
Radius der i -ten Kreisscheibe:

R_i mit i von 0 bis $n-1$

$$R_i^2 = r^2 - (i \cdot h)^2$$

$$R_i^2 = r^2 - (i \cdot \frac{r}{n})^2$$

$$R_i^2 = r^2 \cdot (1 - \frac{i^2}{n^2})$$

$$V_{a,Kugel} = 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \pi \cdot R_i^2 \cdot h$$

$$V_{a,Kugel} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{r^3}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (1 - \frac{i^2}{n^2})$$

$$V_{a,Kugel} = 2 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot$$

$$\left[1 - \frac{0^2+1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2}{n^3} \right]$$

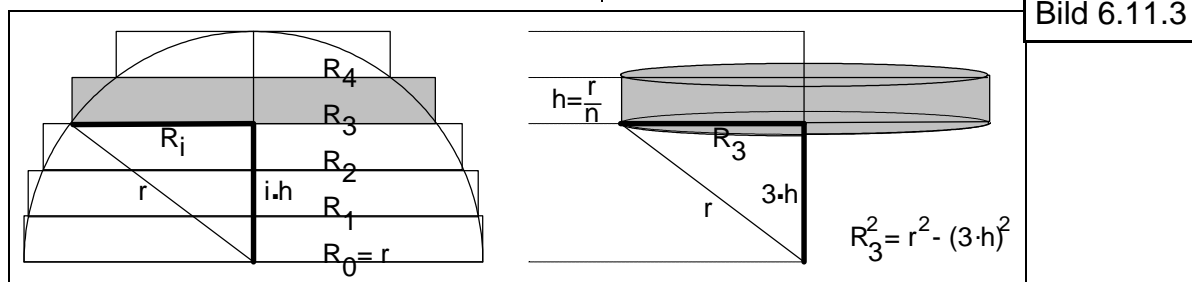
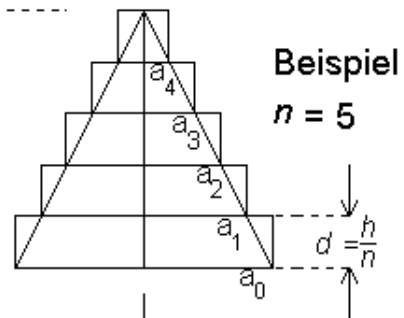
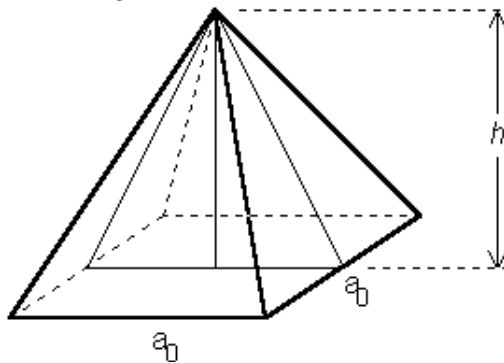


Bild 6.11.3

6.11.5 Volumen der Pyramide

Ziel: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ durch Iteration



$$V_U = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 \cdot d$$

$i: 0 \dots n-1$

$$\frac{a_0}{h} = \frac{a_i}{h-i \cdot d}$$

$$a_i = a_0 \cdot \frac{h-i}{h}$$

$$V_U = \sum_{i=0}^{n-1} \left(a_0 \cdot \frac{h-i}{h} \right)^2 \cdot \frac{h}{n}$$

$$V_U = a_0^2 \cdot h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(h-i)^2}{h^3}$$

$$V_0 = G \cdot h \cdot \frac{1}{3}$$

Analog ergibt sich:

$$V_e = a_0^2 \cdot h \cdot \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)^2}{n^3}$$

wobei die Summe für wachsendes n ($n \rightarrow \infty$) gegen $\frac{1}{3}$ strebt. Es ist

$$V_e < V_{\text{Pyramide}} < V_U$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Außerdem erkennt man, daß

$V_U - V_e = \frac{1}{n}$, d. h. $V_U - V_e$ eine Nullfolge, $[V_e, V_U]$ somit eine Intervallschachtelung für V_{Pyramide} darstellt.

6.12 Geometrische Extremwertaufgaben

Problemstellungen, bei denen ein mathematischer Sachverhalt von verschiedenen Seiten her untersucht werden kann, erweisen sich als besonders wertvoll im Hinblick auf das Erkennen von Strukturen und Zusammenhängen wie auch im Hinblick auf das Erarbeiten von Lösungsstrategien. Ist es dabei zudem möglich, das Problem in verschiedenen Jahrgangsstufen jeweils unter dem Aspekt unterschiedlicher Inhalte und Zielsetzungen zu betrachten, wobei die Ergebnisse der vorangegangenen Jahrgangsstufen dann sinnvoll integriert und erweitert werden können, so bekommen derartige Aufgabenstellungen eine besondere Bedeutung unter dem Blickwinkel mathematischer Methoden und Denkweisen. Ein zusätzlicher Anreiz kann sich noch dadurch ergeben, daß durch eine experimentell orientierte Vorgehensweise dem Schüler Gelegenheit gegeben wird, selbständig und durch zielgerichtetes Probieren zu mathematischen Erkenntnissen zu gelangen.

6.12.1 Die Aufgabenstellung

Zwei Orte P und Q liegen auf derselben Seite einer geradlinig verlaufenden Bahnlinie. Die Lote von P und Q auf die Bahnlinie haben die Längen 3 (km) und 5 (km), die Entfernung der Lotfußpunkte beträgt 8 (km). Zwischen den Lotfußpunkten soll ein gemeinsamer Bahnhof errichtet werden, der mit den Orten P und Q durch geradlinige Zufahrtsstraßen verbunden werden soll. Aus Kostengründen soll die Gesamtstrecke möglichst klein werden (Bild 6.12.1; Turboplot).

- An welcher Stelle muß der Bahnhof errichtet werden, damit die Gesamtstrecke minimal wird?
- Wie lang ist diese minimale Gesamtstrecke?

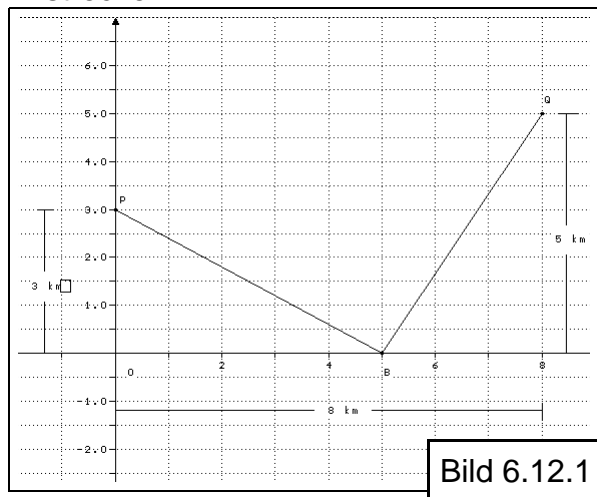


Bild 6.12.1

Mögliche Behandlung dieses Problems im Unterricht

Jahrgangsstufe 7

Lehrplanbezug: Achsenspiegelung
Zeitbedarf: 1 Unterrichtsstunde
Lösung: Konstruktive Lösung

Ein experimentelles Vorgehen durch dynamisches Verändern der Konfiguration am Bildschirm mit Hilfe eines interaktiven Graphik-Werkzeugs (CABRI) führt zu den Einsichten, die eine konstruktive Lösung initiieren.

Man bildet die der Aufgabenstellung entsprechende Skizze im Rechner ab, errichtet in B das Lot, dessen Länge die Streckensumme $s = s_1 + s_2$ repräsentiert, und verändert die Lage von B kontinuierlich.

Dabei können über den Menüpunkt „Messen“ die Längen der Strecken $[PB]$, $[QB]$ und $[BS]$ eingetragen und deren

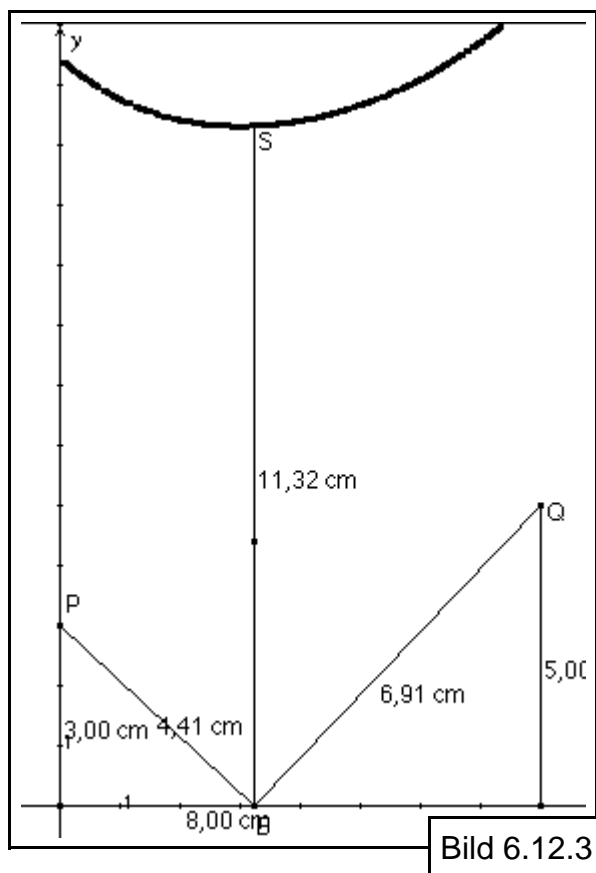
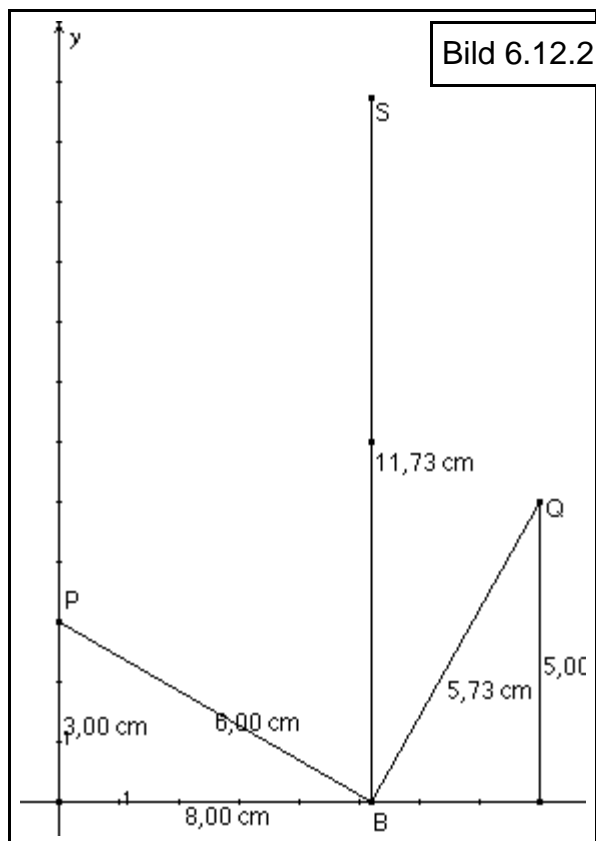
Veränderung bei einer Lageänderung von B beobachtet werden (Bild 6.12.2, Cabri Geomètre).

Läßt man sich zusätzlich mit Hilfe des Werkzeugs „Geometrische Ortslinie“ die Ortslinie des Endpunktes S bei der Bewegung des Punktes S zeichnen, so erkennt man, daß es ein Minimum für s gibt, welchen Wert s_{\min} (ungefähr) hat und für welche Lage von B sich dieses Minimum ergibt (Bild 6.12.3, Cabri Geomètre).

Ein experimentelles Vorgehen mit Variieren der „Bahnhofslage“ ist hierbei besonders eindrucksvoll und lehrreich, weil so einerseits vorschnelle Äußerungen („in der Mitte zwischen den Lotfußpunkten“, „näher bei Q , weil Q von der Bahnlinie weiter entfernt ist als P “) durch eigenes Probieren nachhaltig und einsichtig widerlegt werden, und weil andererseits anschaulich erkannt wird, daß eine minimale Streckensumme existiert.

Sieht der Schüler die „Symmetrie in der Figur“ nicht, so kann der Weg zu einer konstruktiven Lösung motiviert werden durch die Frage, ob sich an der Problemsituation grundsätzlich etwas ändern würde, wenn der Ort P (oder Q) in der gleichen Entfernung auf der anderen Seite der Bahnlinie liegen würde.

Ein anderer Zugang bietet sich an, indem man die Frage erörtert, wo sich der Ort P bei einer bestimmten Lage von B und gleicher Entfernung \overline{PB} befinden könnte. Zeichnet man für verschiedene Lagen von B die Kreise um B mit Radius \overline{PB} , so sieht man, daß sich diese in einem zu P bezüglich der Bahnlinie symmetrischen Punkt P' schneiden (Bild 6.12.4, Cabri Geomètre).



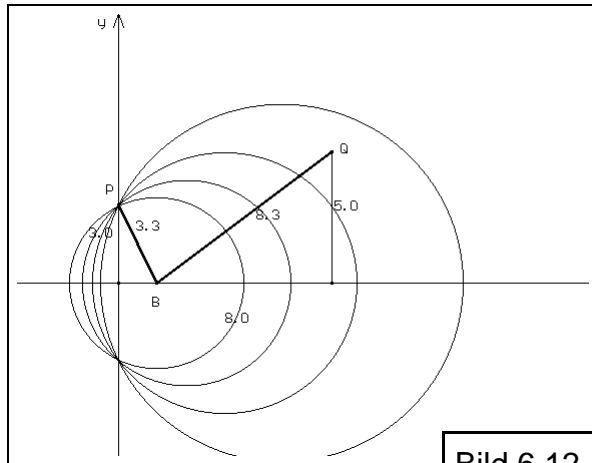


Bild 6.12.4

Jahrgangsstufe 8

Lehrplanbezug: Kongruenz von Dreiecken, Dreiecksungleichung
Gleichung und Graph der linearen Funktion $y = m \cdot x + t$

Zeitbedarf: 1 - 2 Unterrichtsstunden

Lösung: Konstruktive und rechnerische Lösung

Zunächst konstruktive Lösung (wie Jahrgangsstufe 7), Begründung, daß für $B' \neq B$ stets $\overline{P'B'Q} > \overline{PBQ}$ ist;

Gleichung der Geraden $g(P'Q)$,
 $g \cap \{x|y=0\} = \{B\}$;

Graphische Veranschaulichung und Dokumentation durch Einsatz eines Plotprogramms (TurboPlot, MathCad, ...).

Für $x = \overline{OB} = 3$ liefert die konstruktive Lösung $s_{\min} = 11,3$ (exakt: $8\sqrt{2}$).

Ausgehend von der konstruktiven Lösung kann das Ergebnis ($s_{\min} = 11,3$) unter Hinweis auf die unvermeidliche Zeichenungenauigkeit zumindest in Frage gestellt werden. Das Streckenminimum könnte sich auch für $x = 3,1$ oder für $x = 2,9$ ergeben. Man könnte sich mit diesem

durch Konstruktion erhaltenen Ergebnis zufrieden geben, in der Jahrgangsstufe 7 wird und muß man dies auch tun. In den folgenden Jahrgangsstufen sollte aber dem Schüler unter Hinweis auf die Beweisbedürftigkeit mathematischer Aussagen einsichtig gemacht werden, daß es notwendig ist, über das „man sieht es ja, der Rechner zeigt es doch“ hinaus, diese Einsicht, die zunächst nicht mehr als eine Vermutung ist, zu begründen.

Jahrgangsstufe 9

Lehrplanbezug: Sätze im rechtwinkligen Dreieck; Entfernung zweier Punkte, Streckenlänge

Zeitbedarf: 2 Unterrichtsstunden

Lösung: Konstruktive Lösung (wie Jahrgangsstufe 7)

Die Betrachtung des Trägergraphen der Streckenendpunkte S motiviert die Erarbeitung der Funktionsgleichung für die Gesamtstrecke s.

Gesamtstrecke $s(x) = s_1(x) + s_2(x)$; $x = \overline{OB}$
 $s(x) = \sqrt{x^2 + 3^2} + \sqrt{(8-x)^2 + 5^2}$

Sinnvolle Einschränkung: $x \in [0;8]$

Mit Hilfe eines Plot-Programms (TurboPlot, MathCad, derive, ...) wird der Graph zu $s(x)$ erstellt, ebenso die Wertetabelle, eventuell mit zunehmender Verfeinerung der Wertetabelle im interessierenden Bereich ($3-a < x < 3+a$, $a > 0$);

Bei der Interpretation von Graph bzw. Wertetabelle ergibt sich die Vermutung:

$$s(3) = s_{\min}; s_{\min} = 8\sqrt{2}.$$

Diese Hypothese muß begründet werden.

Der Rechner kann zur näherungsweisen Bestimmung des Minimums oder zum Nachweis der Minimumeigenschaft eingesetzt werden.

Der Schwerpunkt bei diesem Vorgehen liegt auf einer Begründung der Vermutung $s(3) = s_{\min}$. Weder die Betrachtung der Funktionswerte zu den Teilfunktionen $s_1(x)$ und $s_2(x)$ und deren Superposition noch die Betrachtung der Funktion $s(x)$ führt über die Vermutung hinaus. Wir müssen also entweder das Minimum von $s(x)$ in $[0;8]$ finden oder nachweisen, daß $s(x)$ für $x = 3$ minimal ist.

Weitere Möglichkeiten

a) Auffinden des Minimums mit Hilfe eines Programms (z. B. Intervallhalbierungsmethode, Intervallabtastmethode):

Es ist nicht erforderlich (obwohl möglich), das Programm mit den Schülern explizit zu formulieren. Man kann, nach Erarbeitung der Strategie des Algorithmus, den Schülern das Programm als Werkzeug zur Verfügung stellen und sie damit die Vermutung verifizieren lassen. Abzulehnen ist in diesem Zusammenhang der Einsatz eines Programms, das auf „Knopfdruck“ ein Ergebnis liefert, weil hier dem Schüler die Einsicht in das „vom Himmel gefallene“ Ergebnis verborgen bleibt.

b) Nachweis, daß für alle $a > 0$ die Funktionswerte $s(3-a)$ und $s(3+a)$ im Intervall $[0;8]$ stets größer als $s(3)$ sind:

Von den mathematischen Voraussetzungen und Anforderungen her ist dieser Weg sicher nur ab der Jahrgangsstufe 9 gangbar. Obwohl die dabei auftretenden und umzuformenden Terme unhandlich aussehen, bietet dieser Weg doch die Möglichkeit, über den Kreis der „üblichen“ Funktionen hinauszusehen und mathematische Methoden zur Begründung von Aussagen darzustellen.

$$\begin{aligned}
 &x = 3 \pm a \quad (a > 0) \\
 &\sqrt{(3 \pm a)^2 + 9} + \sqrt{(3 \pm a)^2 - 16(3 \pm a) + 89} \\
 &\sqrt{a^2 \pm 6a + 18} + \sqrt{a^2 \pm 10a + 50} > 8\sqrt{2}! \\
 &\Rightarrow 64 \cdot a^2 > 0 \\
 &\Rightarrow \text{Für } x = 3 \text{ Minimum } s_{\min} = 8\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

c) Mit einem Mathematik-Werkzeug, z. B. derive, MathCad oder Vivitab läßt man sich für $a > 0$ die Differenzen $s(3+a) - s(3)$ und $s(3-a) - s(3)$ ausrechnen, um so nachzuweisen, daß $s(3 \pm a)$ für alle $a > 0$ größer als $s(3)$ ist, der Term $s(x)$ also für $x = 3$ ein Minimum annimmt und daß dieses Minimum $8\sqrt{2}$ beträgt.

Wertetabelle (Bild 6.12.3; z. B. derive):

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3^2} + \sqrt{(8-x)^2 + 5^2}$$

x	f(x)	x	f(x)
0.00	12.434		
0.50	12.055		
1.00	11.765		
1.50	11.555	2.50	11.338
2.00	11.416	2.60	11.329
2.50	11.338	2.70	11.322
3.00	11.314	2.80	11.318
3.50	11.337	2.90	11.315
4.00	11.403	3.00	11.314
4.50	11.512	3.10	11.315
5.00	11.662	3.20	11.317
5.50	11.855	3.30	11.322
6.00	12.093	3.40	11.328
6.50	12.379	3.50	11.337
7.00	12.715		
7.50	13.103		
8.00	13.544		

Bild 6.12.3

Bild 6.12.4

```

1: "DERIVE"
2: "f(3+a) > f(3) für alle a > 0"
3: "=====
4: F(x) := sqrt(x^2 + 3^2) + sqrt((8-x)^2 + 5^2)
5: "=====
6: F(3)
7: 8 sqrt(2)
8: 11.3137
9: "=====
10: X := 3 + a

11: sqrt((3+a)^2 + 3^2) + sqrt((8-(3+a))^2 + 5^2) - 8
12: A := 10
13: 0.00000000161867
14: "=====
15: X := 3 - A
16: sqrt((3-A)^2 + 3^2) + sqrt((8-(3-A))^2 + 5^2) - 8
17: A := 10
18: 0.00000000161867
    
```

6.12.2 Weitere Aufgabe

Durch die Punkte $A(0|0)$, $B(10|0)$ und $C(6|6)$ ist ein Dreieck ABC bestimmt. Von einem Punkt $P(x_0|y_0)$ des Dreiecks werden die Lote auf die Dreiecksseiten gefällt. Für welche Lage des Punktes P wird die Summe der Längen dieser Lote am kleinsten (Bild 6.12.5)?

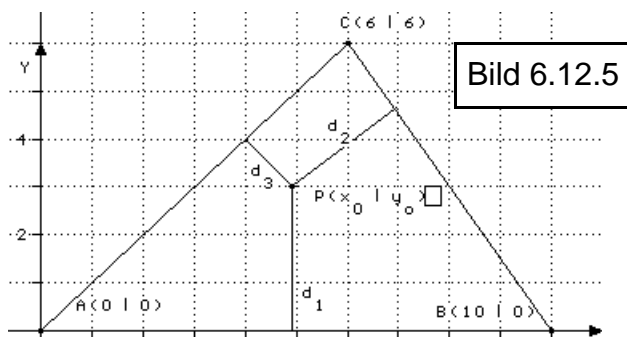


Bild 6.12.5

Lehrplanbezug, Voraussetzungen

Lineare Funktion, Geradengleichung, Schnittpunkt zweier Geraden, Systeme linearer Ungleichungen, Abstand zweier Punkte, Länge einer Strecke.

Lösungsschritte

1. Mit einem interaktiven Graphik-Werkzeug (CABRI) wird eine Zeichnung entsprechend der Aufgabenstellung erstellt. Die Lage des Punktes P wird variiert, wobei auch Sonderlagen einbezogen werden (Dreiecksseiten, Dreiecksecken). Die Längen der drei Lote werden gemessen oder es wird eine Strecke konstruiert, deren Länge die Summe der drei Lote repräsentiert (s. Bilder 6.12.6 und 6.12.7).

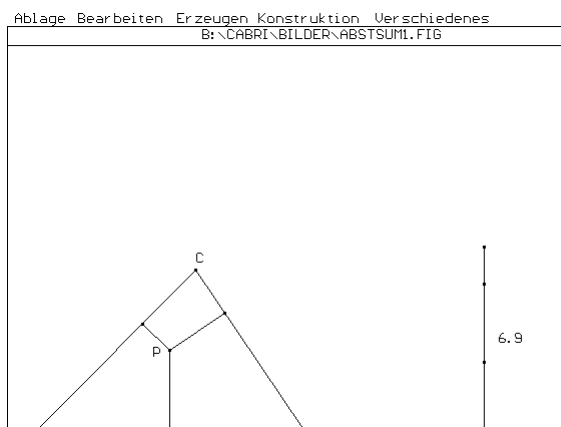
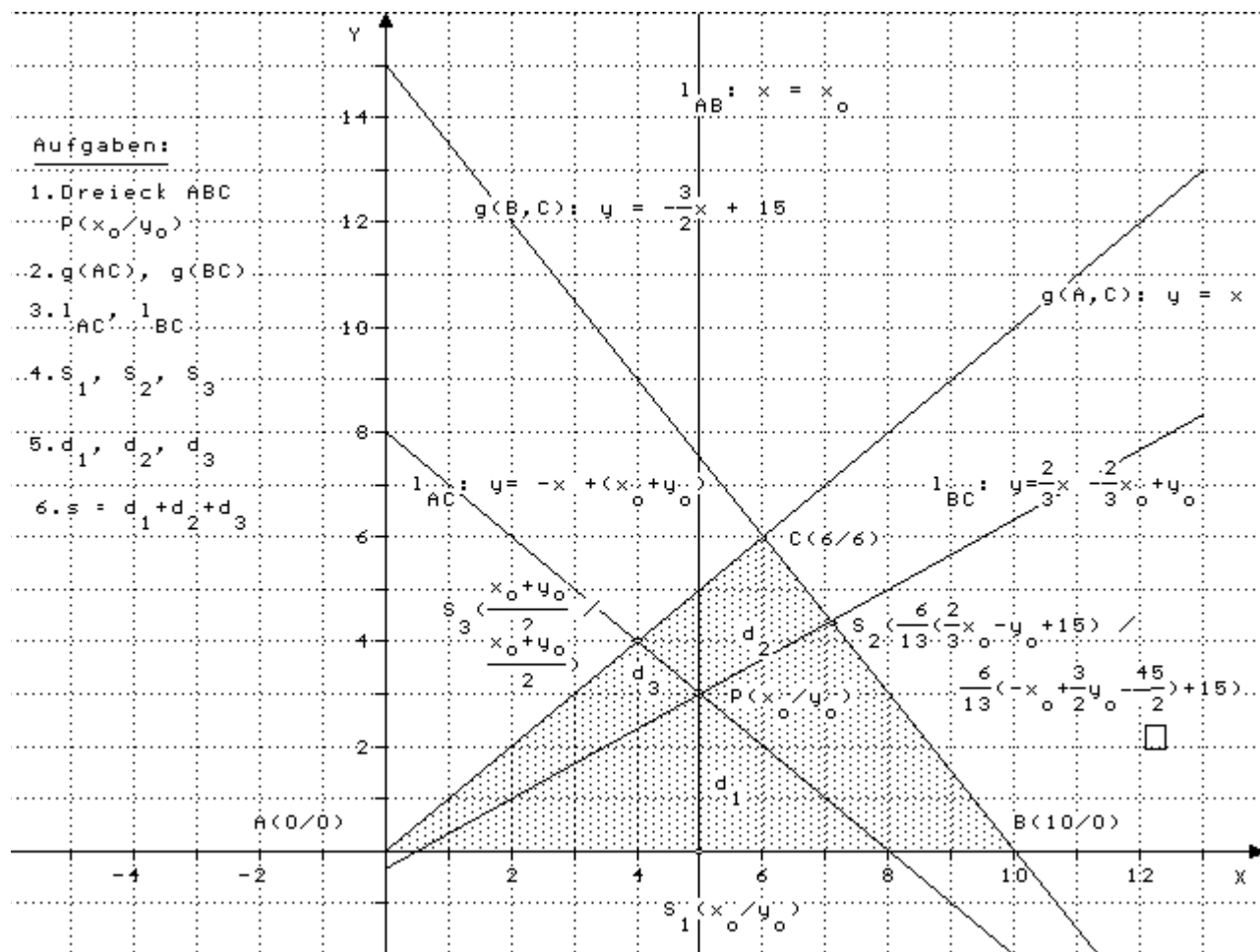
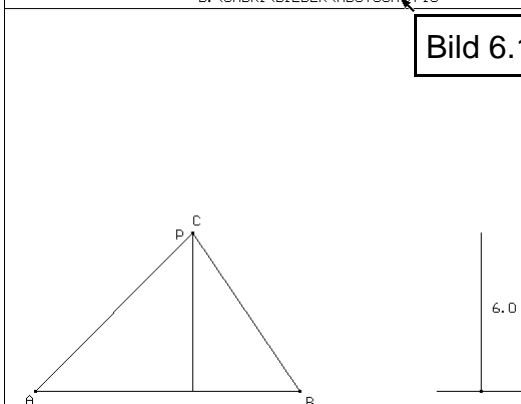


Bild 6.12.6



Ablage Bearbeiten Erzeugen Konstruieren Verschiedenes
B:\CABRI\BILDER\ABSTUMM.FIG

Bild 6.12.7



2. Die experimentellen Untersuchungen aus 1. führen zu der Vermutung, daß für $P = C$ (P fällt mit der Dreiecksecke zusammen, durch die die kürzeste Drei-

eckshöhe verläuft) s minimal wird: $s_{\min} = h_c = 6$ (LE). Bild 6.12.8

3. Die Berechnung von d_1 , d_2 und d_3 und anschließende Summenbildung führt zu dem Ausdruck

$$s(x_o, y_o) = |y_o| + \left| \frac{\sqrt{13}}{13} \cdot (3x_o + 2y_o - 30) \right|$$

$$; \quad + \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x_o - y_o) \right|$$

Aufgrund der Nebenbedingungen

$$y \leq -\frac{3}{2}x + 15 \quad \text{und} \quad y \leq x$$

ergibt sich dann:

$$s(x_o, y_o) = y_o + \frac{\sqrt{13}}{13} \cdot (3x_o + 2y_o - 30)$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x_o - y_o) \quad (*)$$

Für ein „spezielles“ Dreieck kann der Ausdruck für $s(x_0, y_0)$ in der Jahrgangsstufe 9, WPfGr. I (RS) erarbeitet werden und die Vermutung mit Hilfe eines geeigneten Werkzeugs bestätigt werden. Der allgemeine Fall entzieht sich in der S I jedoch einer Verifikation (s. Bild 6.12.9; Programm derive).

1:	”Bestätigen durch Einsetzen; Programm: derive”
2:	$s = d1 + d2 + d3$
3:	$s(x,y) := y + \frac{ \sqrt{13}(3x + 2y - 39) }{13} + \frac{ \sqrt{2}(x - y) }{2}$
4:	$s(3,3)$
5:	7.16025
6:	$s(5,3)$
7:	6.9136
8:	$s(10,0)$
9:	7.07106
10:	$s(6,6)$
11:	6

Bild 6.12.9

4. Die Aufgabe, $P(x_0|y_0)$ so zu bestimmen, daß s minimal wird, führt auf ein **Optimierungsproblem**.

Rechnerische Lösung

Mit einem Programm, das es erlaubt, Aufgaben aus dem Bereich der linearen Optimierung numerisch zu lösen (z. B. Eureka; Bild 6.12.10)

Dieser Weg erscheint für die SI wenig sinnvoll, weil der mathematische Hintergrund fehlt; der Einsatz eines derartigen Programms kann allenfalls als zusätzliche Bestätigung der in 3. durch „Einsetzen“ gewonnenen Ergebnisse dienen.

:Minimum Streckensumme; Programm: Eureka
:Summe der Längen der drei Lote von P(x/y) auf die drei Dreiecksseiten

```
summe=abs(y)+abs(sqrt(13)/13*(3*x+2*y-30))+abs(sqrt(2)/2*(x-y))
$min (summe)
```

:Nebenbedingungen:

```
x >= 0
y >= 0
y <= x
y <= -1.5*x+15
*****
```

Solution

Variables	Values
summe	= 6.
x	= 6.
y	= 6.

Bild 6.12.10

Graphische Lösung

Die Gleichung (*) wird nach y aufgelöst:
 $y = -0,478x + 31,83 - 3,83s$

Die Funktion $y(x, s)$ ist die **Zielfunktion**. Für verschiedene Belegungen des Parameters s werden die zugehörigen Geradengleichungen aufgestellt und die Graphen dieser Geraden in ein Koordinatensystem zusätzlich zum **Planungsvieleck**, das die Nebenbedingungen beschreibt, eingezeichnet (Plotprogramm: Vivitab; Turboplot,....). Dabei muß darauf geachtet werden, daß dem Schüler die folgenden Punkte bzw. Fragen bewußt sind oder bewußt gemacht werden:

- Alle Graphen haben die gleiche Steigung $-0,478$ und unterscheiden sich durch den y -Achsenabschnitt $31,8 - 3,83 \cdot s$.
- Welche Bedeutung hat der Parameter s ?
- Welche Eigenschaft haben alle Punkte einer Geraden, die einem bestimmten Wert von s entspricht?

- Für welche Gerade bzw. für welche Belegung von s muß sich das gesuchte Streckenminimum ergeben? (s. Bilder 6.12.11, derive und 6.12.12, Turboplot)

1: $|y| + \left| \frac{\sqrt{13}}{13} (3x + 2y - 30) \right| + \left| \frac{\sqrt{2}}{2} (x - y) \right| = d$

2: $d = \frac{\sqrt{13} |3x + 2y - 30|}{13} + \frac{\sqrt{2} |x - y|}{2} + y$

3: "Wegen $y \leq -3/2 * x + 15$ ist $|3x + 2y - 30| \leq 0$ "

4: "Wegen $y \leq x$ ist $|x - y| \geq 0$ "

5: "Somit:"

6: $s = y - \frac{\sqrt{13}}{13} (3x + 2y - 30) + \frac{\sqrt{2}}{2} (x - y)$

7: $s = -0.261 y - 0.124 x + 0.32$

8: "=====

9: $y = -0.478 x + 31.6 - 3.83 s$

10: "=====

11: $y = -0.478 x + 31.8 - 3.83 s$

12: $y = 12.6 - 0.478 x$

13: $y = -0.478 x + 31.8 - 3.83 s$

14: $y = 0.82 - 0.478 x$

15: $y = -0.478 x + 31.8 - 3.83 s$

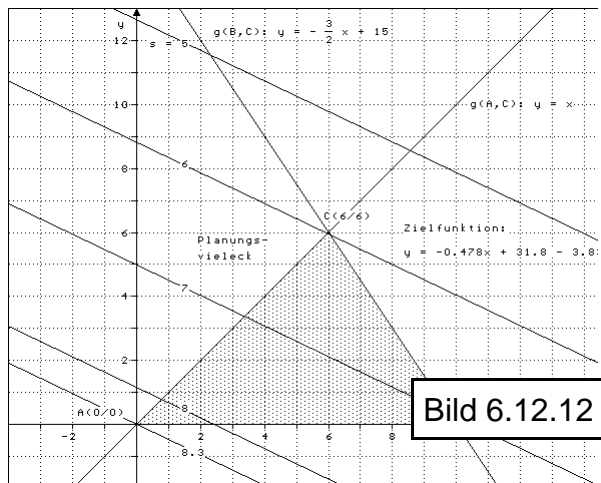
16: $y = 4.99 - 0.478 x$

17: $y = -0.478 x + 31.8 - 3.83 s$

18: $y = 1.16 - 0.478 x$

19: ..

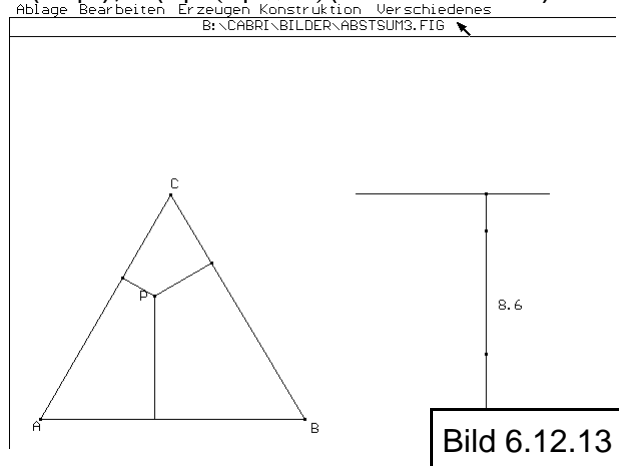
Bild 6.12.11



Mögliche Erweiterungen

1. Existiert für s ein Maximum? Wenn ja, für welche Lage des Punktes P ? Welchen Wert hat s_{\max} ?

2. Untersuchungen für den Fall des gleichseitigen Dreiecks, z. B. $A(0|0)$, $B(10|0)$, $C(5|5\sqrt{3})$ (s. Bild 6.12.13).



Hinweise: Für das genannte gleichseitige Dreieck ergibt sich

$$s(x_0, y_0) = |y_0| + \frac{1}{2} \cdot |\sqrt{3} x_0 + y_0 - 10\sqrt{3}| + \frac{1}{2} \cdot |\sqrt{3} x_0 - y_0|$$

bzw. unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen

$$s(x_0, y_0) = y_0 + \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3} x_0 + y_0 - 10\sqrt{3}) + \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3} x_0 - y_0)$$

und somit $s = 5\sqrt{3}$.

Bei der Herleitung tritt für d_2 der Ausdruck

$$d_2 = \frac{1}{2} \sqrt{3x_0^2 + 2\sqrt{3} x_0 y_0 - 60x_0 + y_0^2 - 20\sqrt{3} y_0 + 300} \quad \text{mit}$$

dem Radikanden $(\sqrt{3} x_0 + y_0 - 10\sqrt{3})^2$. Mit Schülern kann der Term für d_2 zwar hergeleitet, dieser aber wohl nicht in die angegebene Form faktorisiert werden.

Zusätzlich kann man die Faktorisierung vorgeben und verifizieren (lassen) oder mit einem Programm, z. B. derive, den Radikanden faktorisieren.

6.13 Konstruieren eines Dreiecks mit Umkreis und anschließender Scherung

6.13.1 Voraussetzungen

An vielen Realschulen ist für das Fach Technisches Zeichnen CAD-Software eingeführt. Mit dieser leistungsfähigen Software lassen sich u. a. klassische geometrische Konstruktionen durchführen. Ihre Installation und Kenntnisse der Schüler im Umgang mit dieser Software können somit auch im Mathematikunterricht sinnvoll eingesetzt werden. Im vorliegenden Beispiel wird das Programm **Pictures by PC** verwendet. Das Thema Scherung wird in Jahrgangsstufe 10 im Abschnitt Abbildungen behandelt.

6.13.2 Aufgabe

Es soll folgende Aufgabe gelöst werden: das $\triangle ABC$ mit $c = 5 \text{ cm}$, $a = 7 \text{ cm}$, $b = 42^\circ$ soll mit seinem Umkreis horizontal um den Winkel $j = -35^\circ$ geschert werden. Aus der Figur kann man dann Eigenschaften der Scherung ablesen.

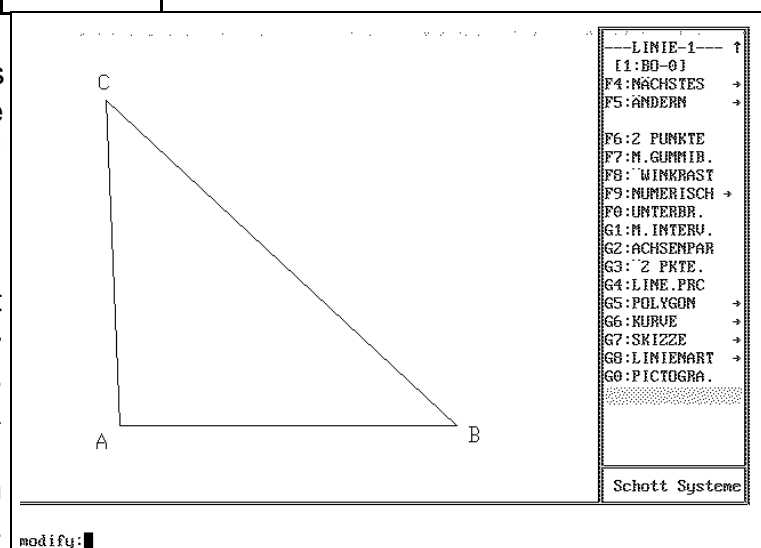
6.13.3 Vorgehen

Nach dem Starten des Programms wählt man aus dem Bildschirmmenü mit Hilfe der Funktionstasten oder durch ein cursorgesteuertes Instrument (Maus, Digitizer): [F6]: ZEICHNEN [F7]: LINIE [F9]: NUMERISCH. Jetzt öffnet sich das LINIE-NUMERISCH ZEICHNEN Menü. Nach Auswahl von [F8]: A (Winkel) ist 0 einzugeben. Anschließend wählt man im gleichen Untermenü [F9]: L

(Länge) und man gibt aus Maßstabsgründen ein Vielfaches von 5 ein, z. B. 350. Wählt man nun LINIE NUMERISCH-ZEICHNEN so kann man die Strecke zeichnen. Erneute Anwahl von [F9]: NUMERISCH führt nocheinmal in das Untermenü LINIE NUMERISCH-ZEICHNEN. Man wählt dort wieder [F8]: A (Winkel) an und gibt 138° ein (Drehsinn!). Nach der Anwahl von [F9]: L (Länge) gibt man den oben benutzten Vielfachenfaktor von 7 ein, in unserm Fall also 490. Nachdem man dann LINIE NUMERISCH-ZEICHNEN angewählt hat trägt man in B die Strecke an. Mit [F6]: 2 PUNKTE verbindet man B mit C (Bild 6.13.1). Dann verläßt man das LINIE-1 Menü und wählt an [F8]: KREIS G1: 3 PUNKTE und der Umkreis wird gezeichnet.

Nun wendet man die Prozedur CVTOPIC (Eingabe über die Tastatur) auf den Umkreis an. Diese Prozedur wandelt den Kreis mit seinen internen Vektorbefehlen in ein Polygon um, das dann geschert werden kann. Weil man den Umkreis und das Dreieck zusammen scheren will, faßt man sie durch Selektion mit dem Fadenkreuz zu einem Macro mit dem Namen z. B. drei zusammen. Die selektierten Objekte werden dabei durch eine spezielle Farbe gekennzeichnet. Die Befehlsfolge dazu ist. KREIS-1,

Bild 6.6.1



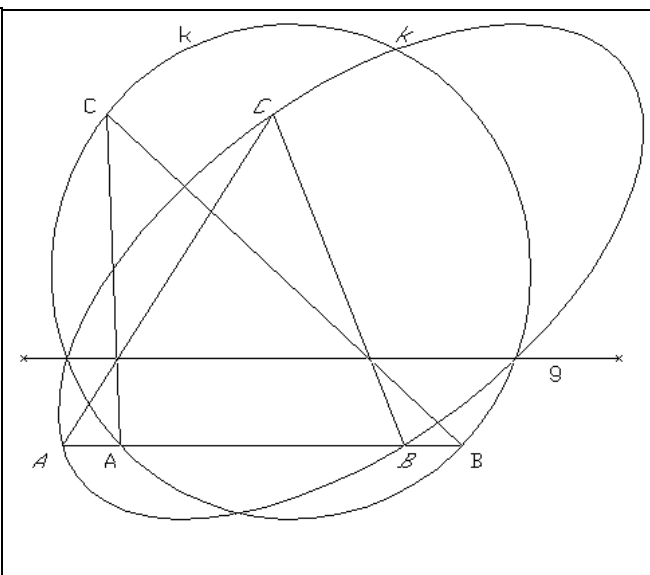
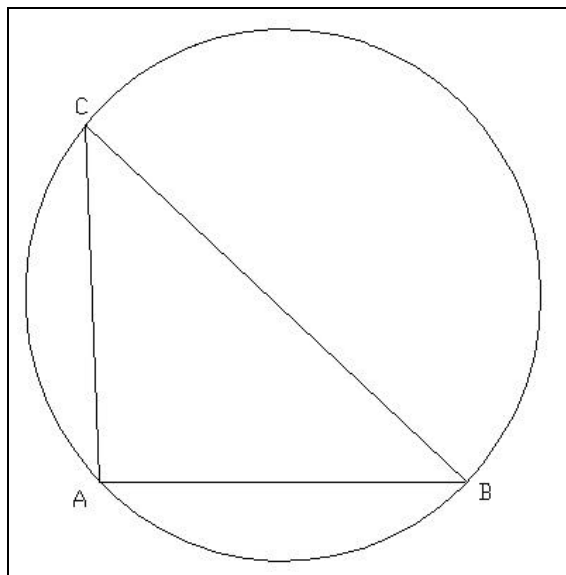


Bild 6.6.2

ZEICHNEN, [G5]: STRUKTUR, [F7]: MACRO (Name eingeben), [F9] VERKETTEN (Wähle alle Objekte). Als Ergebnis erhält man dann Bild 6.13.2. Zum Scheren wählen wir an: OBJ.STRU , [F8]: ÄNDERN , [F7]: FORM, [F4]: NÄCHSTES , [F6]: SCHEREN , [F6]: HOR.PARAL. Nun kann man einen Punkt der (horizontalen) Scherungsachse wählen und den Scherungswinkel eingeben. Die Scherung wird selbsttätig durchgeführt. Für die Schüler ist es sicher sinnvoll, daß man nachträglich noch (oder vor der Makro-Erstellung) die Scherungsachse g einzeichnet mit Hilfe des LINIE-1 Menüs und z. B. [F6]: 2 PUNKTE.

Dem erhaltenen Bild 6.13.3 kann man nun entnehmen, daß die Scherung z. B. nicht winkeltreu, nicht längentreu, nicht kreistreu und nicht formtreu ist.

6.13.4 Reihenfolge, in der die Kommandos nach dem Programmstart eingegeben werden müssen

[F6]: ZEICHNEN
 [F7]: LINIE
 [F9]: NUMERISCH
 [F8]: A (Winkel)
 [F9]: L (Länge)

Bild 6.6.3

LINIE NUMERISCH-ZEICHNEN

[F9]: NUMERISCH

[F8]: A (Winkel)

[F9]: L (Länge)

LINIE NUMERISCH-ZEICHNEN

[F6]: 2 PUNKTE

LINIE-1

[F8]: KREIS

[G1]: 3 PUNKTE

CVTOPIC

KREIS-1

ZEICHNEN

[G5]: STRUKTUR

[F7]: MACRO (Makroname eingeben)

[F9]: VERKETTEN (Wähle alle Objekte)

OBJ.STRRU

[F8]: ÄNDERN

[F7]: FORM

[F4]: NÄCHSTES

[F6]: SCHEREN

[F6]: HOR.PARAL (Wähle 1. Punkt - Winkel)

6.14 Randwinkelsatz mit Pictures by PC

6.14.1 Ziel

Ziel dieser Einheit ist es, einen anderen, neuen Zugang zum Randwinkelsatz mit Hilfe des Einsatzes des Computers zu finden, indem man die Umkehrung des Satzes nachweist.

6.14.2 Vorgehen

Nach dem Starten des Programms wählt man aus dem Bildschirmenü mit Hilfe der Funktionstasten oder durch ein cursorsteuerndes Instrument (Maus, Digitizer): [F6]: ZEICHNEN [F7]: LINIE [F6]: 2 PUNKTE und erzeugt damit die Strecke. Anschließend zeichnet man, indem man 3-mal nacheinander [F7]: M.GUMMIB wählt, durch den Punkt A ein Geradenbündel aus 3 Halbgeraden (Bild 6.14.1). Nun konstruiert man vom Punkt B aus die Geraden, die mit den Geraden des Halbgeradenbündels einen Winkel von z. B. 68° bilden. Dazu wählt man die Kommandozeilen [F4]: NÄCHSTES und [G4]: NEIGUNGSGR und läßt sich durch die Info-Zeile (Gerade selektieren, Punkt selektieren, Winkel eingeben) führen; dadurch erhält man dann Bild 6.14.2. Nun muß man die optisch schon vorhandenen Schnittpunkte noch im Computer rechnerisch

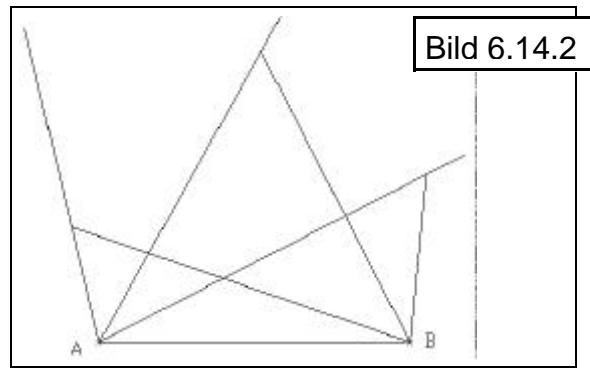


Bild 6.14.2

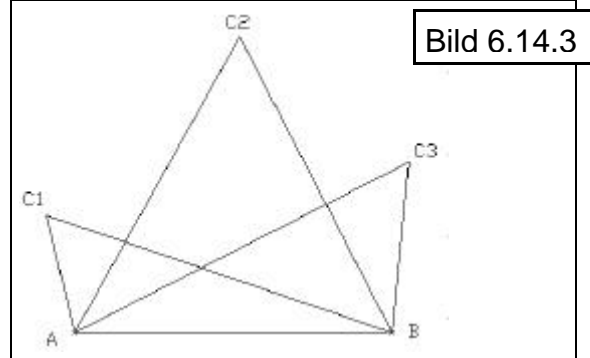


Bild 6.14.3

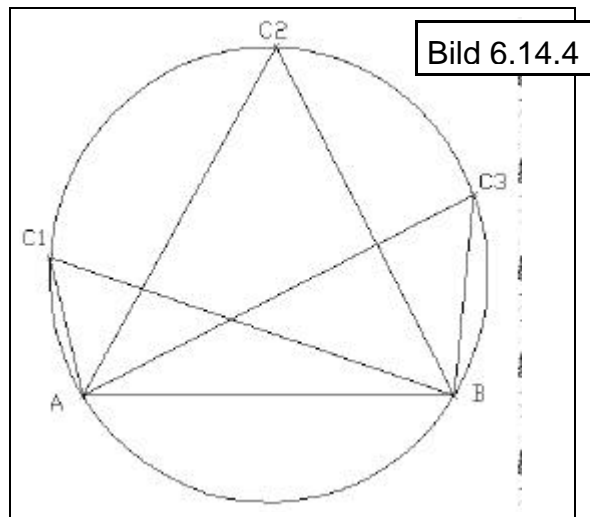


Bild 6.14.4

erzeugen. Durch die Anwahl von [F5]: ÄNDERN, [F8]: TRIMMEN und nach 3maligem Aufruf von [F7]: BEIDE (Info-Zeile!) erhält man Bild 3 mit den Schnittpunkten C1, C2 und C3. Nach der Anwahl von [F4]: ZEICHNEN, [F8]: KREIS und [G1]: 3 PUNKTE konstruiert man den Kreis durch die 3 Punkte C1, C2 und C3. Dieser Kreis scheint nun auch durch die Punkte A und B zu verlaufen (Bild 6.14.4). Um dieses genauer zu überprüfen, zoomt man den Eckpunkt A oder den Eckpunkt B. Dazu wählt man im GLOBAL Menü

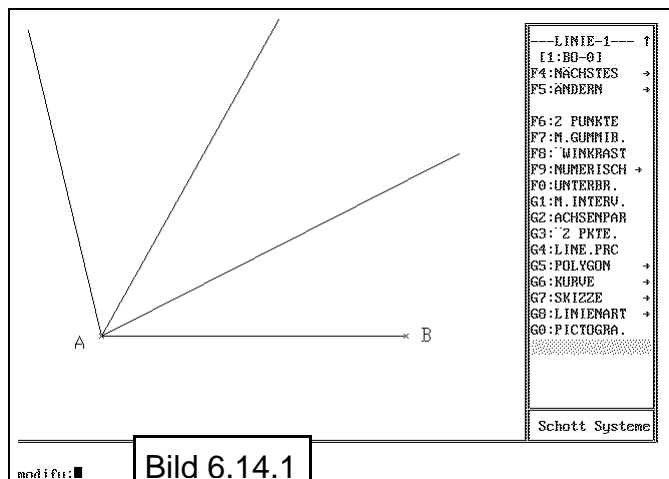


Bild 6.14.1

über [1: BO-0] und [F8]: ZOOM ein Zoomfenster und stellt fest, daß der Kreis tatsächlich durch die Punkte A und

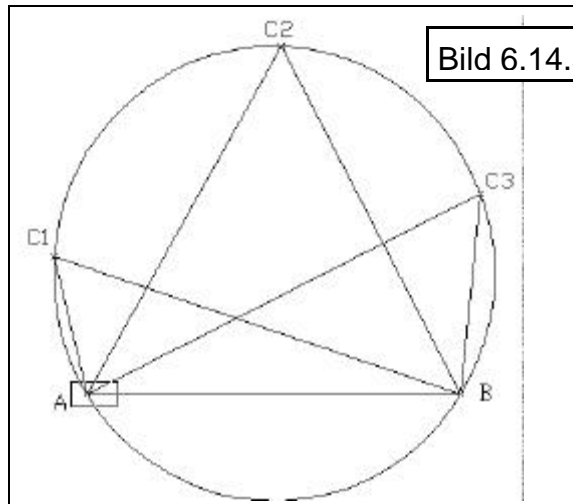


Bild 6.14.5

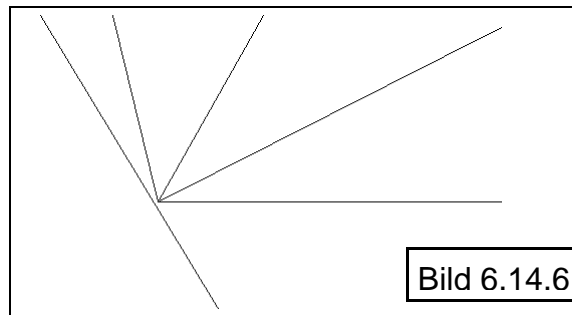


Bild 6.14.6

B verläuft. Diese Tatsache kann man sogar durch wiederholtes Zoomen sehr schön bestätigen. Nach sehr häufigem Zoomen kann man dann plötzlich feststellen, daß die Kreislinie nicht mehr durch den Punkt A oder B verläuft (Bild 6.14.6). Dies ist ein Effekt, der durch die beschränkte Rechengenauigkeit des Computers bedingt ist. Wenn man sich nun noch für die erreichte Vergrößerung interessiert, so wählt man im GLOBAL Menü über [1: BO-0], F9: ZOOM SPEZ und G8: ZOOMFAKTOR aus. Man stellt dann fest, daß der Zoomfaktor über 1000000 liegt. Dies entspricht einer Vergrößerung, die weit über der eines Rasterelektronenmikroskops liegt. Als Ergebnis kann man also festhalten, daß man im Rahmen der Rechengenauigkeit nachgewiesen hat:

Wenn in einem Kreis die Randwinkel gleich groß sind, dann liegen sie über demselben Bogen.

6.14.3 Reihenfolge, in der die Kommandos nach dem Programmstart eingegeben werden müssen:

F6: ZEICHNEN
 F7: LINIE
 F6: 2 PUNKTE
 F7: M.GUMMIB (dreimal)
 F4: NÄCHSTES
 G4: NEIGUNGSGR (dreimal - Infozeile beachten)
 F5: ÄNDERN
 F8: TRIMMEN
 F7: BEIDE
 F4: ZEICHNEN
 F8: KREIS
 G1: 3 PUNKTE (GLOBAL Menü)
 F8: ZOOM (wiederholt)
 F9: ZOOM SPEZ
 G8: ZOOMFAKTOR

7 Experimente mit dem Zufall

7.1 Würfeln

7.1.1 Der 6er Würfel

Jeder Wurf eines 6er-Würfels ist ein Experiment. Das exakte Ergebnis eines Wurfes ist nicht voraussagbar. Wohl aber ist für einen idealen Würfel zu erwarten, daß jede Zahl etwa gleich häufig erschienen ist, wenn man viele Würfe durchgeführt hat.

Aufgabe

Berechne für 500 Würfe die relative Häufigkeit des Ergebnisses '6', d. h. den Quotienten $h := \frac{\text{Anzahl 6er}}{\text{Anzahl Würfe}}$. Man erwartet, daß sich für so viele Würfe der Quotient dem Wert $w := \frac{1}{6}$ nähert.

Lösung

Die Funktion $\text{rnd}(6)$ hat als Wertebereich die Zahlenmenge $\{0,1,2,3,4,5\}$. Will man tatsächlich einen 6er Würfel simulieren, so eignet sich die Funktion $\text{rnd}(6)+1$.

Das Simulationsergebnis für 500 Würfe zeigt die Graphik (Bild 7.1.1)

Im mathematischen Modell (Bild 7.1.2) sieht man, wie die Abbildung erzeugt werden kann. In Zeile 1 wird die Zufallszahl erzeugt. Die nächste Zeile erhöht

die Anzahl der Würfe um 1. Zeile 3 summiert die Treffer. Sie ist eine Zweifachauswahl. In der letzten Modellzeile wird die relative Häufigkeit errechnet.

n = 1	M O D E L L
a = rnd(6)+1	
Würfe = Würfe+1	
Treffer = if(a=6,Treffer+1,Treffer)	
RelHäuf = Treffer/Würfe	Bild 7.1.2

Wiederholt durchrechnen

Abbruchbedingung

Die Umsetzung der Ergebnisse auf eine Graphik geschieht hier über das Setzen des Schalters *Zeichenautomatik* aus dem Menü *Optionen* und dem *Wiederholten Durchrechnen* unter der Abbruchbedingung "Würfe > 500".

Weitere Aufgabe: Berechne für 500 Würfe den Mittelwert alle Ergebnisse und stelle das Resultat graphisch dar.

7.1.2 Doppelwürfelexperiment

Aufgabe

Welche relativen Häufigkeiten haben die Würfelsummen, wenn man zwei Würfel gleichzeitig wirft?

n = 150	Ordnen Optionen
a = rnd(6)+1	Sortieren...
b = rnd(6)+1	Klassensumme...
c = a+b	Klassenmittel...
	Wiederherstellen

Bild 7.1.3

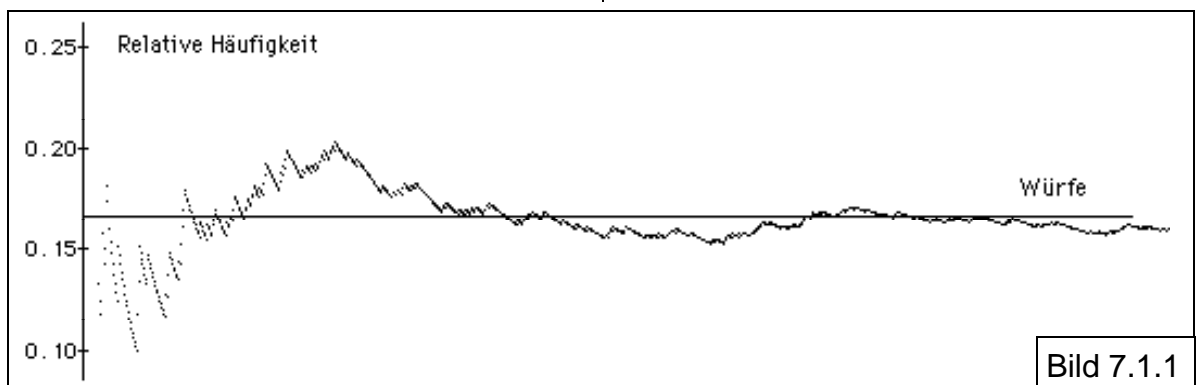


Bild 7.1.1

Wir simulieren zunächst 150mal das Doppelwürfelexperiment und errechnen für jedes Experiment die Würfelsumme.

Mit den Menüfunktionen unter "Ordnen", - *Klassensumme* -, kann man dann herausfinden, wie oft jedes Ergebnis vorkommt.

Es wird automatisch eine Spalte Habs (absolute Häufigkeit) erzeugt und in die Tabelle eingefügt (Bild 7.1.4) (Anmerkung: Man könnte die Spalte c direkt mit $rnd(6)+rnd(6)+2$ erzeugen! Das vermeidet die Spalten a und b bei der Klassensummenbildung).

Aus der Spalte für Habs, also den absoluten Häufigkeiten, ergibt sich durch Division mit der Anzahl der Experimente die Skala der relativen Häufigkeiten. Um in derselben Tabelle arbeiten zu können, entfernt man die Formeln in den Spalten a, b und c und fixiert die Ergebnisse der Klassensummenfunktion durch die Überschrift DATEN. Dann kann man mit

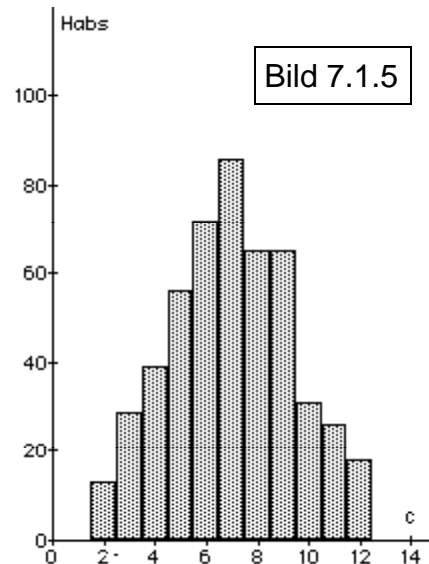


Bild 7.1.5

n	a	b	c	Habs
150	$rnd(6)+1$	$rnd(6)+1$	a+b	
1	3	3	2	3
2	10	11	3	7
3	20	20	4	10
4	48	37	5	17
5	77	61	6	23
6	82	93	7	25
7	87	89	8	22
8	88	101	9	21
9	46	54	10	10
10	44	44	11	8
11	24	24	12	4

Bild 7.1.4

Graphisch aufgetragen ergibt sich aus dem Experiment folgendes Stabdiagramm (Bild 7.1.5):

Die graphische Umsetzung der Tabelle (Bild 7.1.7):

entfernt man die Formeln in den Spalten a, b und c und fixiert die Ergebnisse der Klassensummenfunktion durch die Überschrift DATEN. Dann kann man mit

$$RelH = Habs/150$$

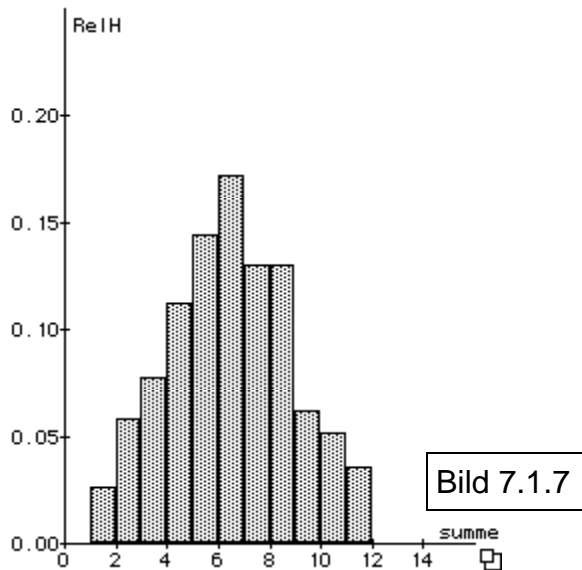
und

$$KumH = \Sigma(RelH),$$

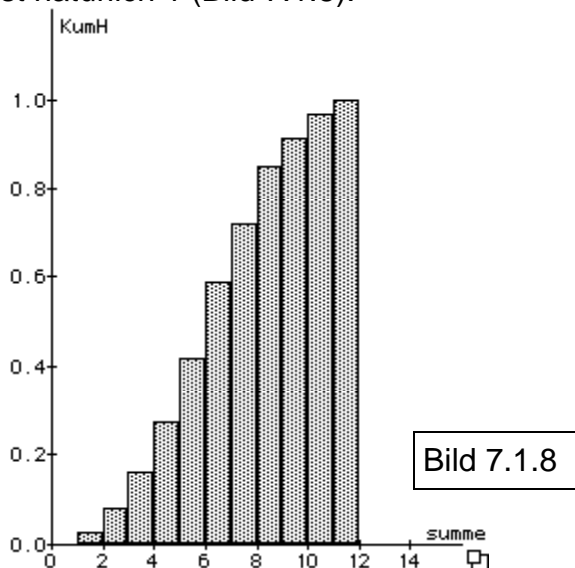
für die relativen und kumulierten relativen Häufigkeiten bei 150 Würfeln berechnen (Bild 7.1.6).

n	a	b	c	Habs	RelH	KumH
11	DATEN	DATEN	DATEN	DATEN	Habs/150	$\Sigma(RelH)$
1	3	3	2	3	0.02	0.02
2	10	11	3	7	0.0466666667	0.0666666667
3	20	20	4	10	0.0666666667	0.1333333333
4	48	37	5	17	0.1133333333	0.2466666667
5	77	61	6	23	0.1533333333	0.4
6	82	93	7	25	0.1666666667	0.5666666667
7	87	89	8	22	0.1466666667	0.7133333333
8	88	101	9	21	0.14	0.8533333333
9	46	54	10	10	0.0666666667	0.92
10	44	44	11	8	0.0533333333	0.9733333333
11	24	24	12	4	0.0266666667	1

Bild 7.1.6



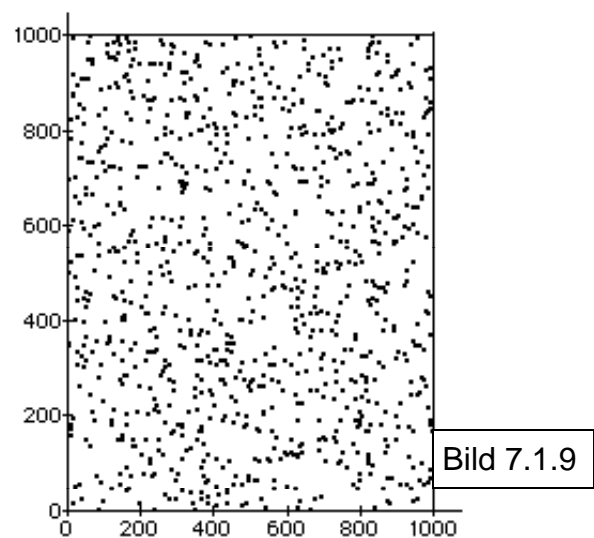
Die Summe aller relativen Häufigkeiten ist natürlich 1 (Bild 7.1.8).



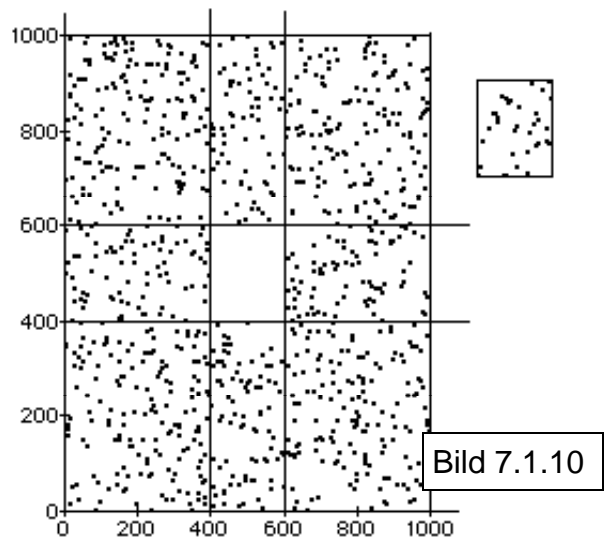
Weitere Aufgabe: Welche Verteilung haben die Häufigkeiten der Würfelsummen beim Werfen von 3 Würfeln?

7.1.3 Wieviele Punkte sind das?

Sagen wir, es gibt Grund zur Annahme, daß das unten abgebildete Quadrat (Bild 7.1.9) durch einen Zufallsprozeß gepunktet wurde, wobei jedes Ergebnis auf der x- bzw. y-Achse zwischen 0 und 1000 gleichwahrscheinlich war. Kann man dann schätzen, wie viele Tupfen in dem Quadrat sind?

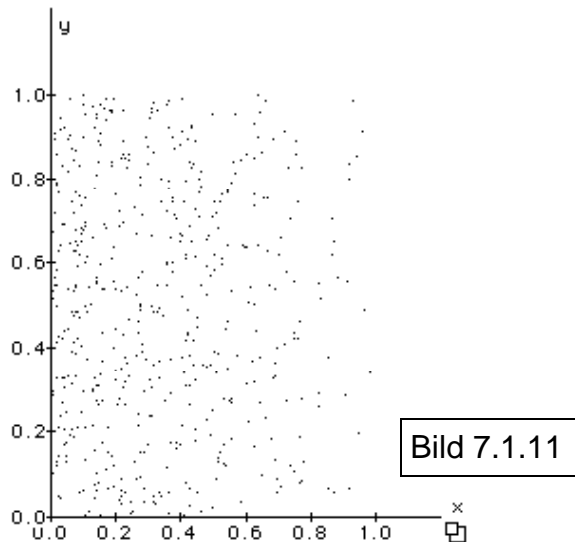


Das folgende Bild (Bild 7.1.10) weist einen Weg: Wähle ein beliebiges Planquadrat aus und zähle darin die Tupfen! Wie kommt man jetzt zu einer Schätzung für die Gesamtzahl?



Weitere Aufgaben

1. Erzeuge ein Rechteck mit den Seitenlängen 7 und 4 mit 2000 gleichverteilten Tupfen.
2. Erzeuge ein Bild, in dem die Tupfen nicht gleichverteilt sind, etwa wie in der folgenden Abbildung (7.1.11)!



7.1.1 Länge von Zufallsstrecken

Aufgabe

Bestimme die mittlere Länge einer zufällig gezogenen Kreissehne.

Lösungsvarianten

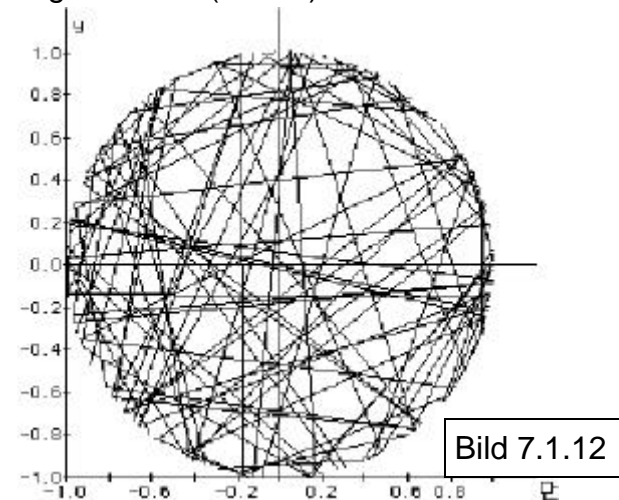
1. Man wählt für das Zeichnen einer Sehne durch Zufallsverfahren 2 Punkte auf dem Kreis und verbindet diese.
2. Man startet immer vom gleichen Punkt aus und wählt nur den zweiten Punkt zufällig.
3. Man startet von einem Punkt aus und sucht dann zufällig den jeweils nächsten, der dann wieder Ausgangspunkt einer neuen Sehne wird.
4. Man sucht einen Punkt auf dem Kreisrand zufällig aus und zieht eine horizontale Tangente.

Die Lösungsvarianten 1, 2, 3 und 4 ergeben die folgenden Bilder.

Lösung zu 1.

Mit den Startwerten $k(2) = 0$, $Summe(2) = 0$, der Einstellung *Wiederholt rechnen* mit Abbruchbedingung $k > 60$ ergibt sich bei eingeschalteter

Zeichenautomatik aus dem Modell das folgende Bild (7.1.12).



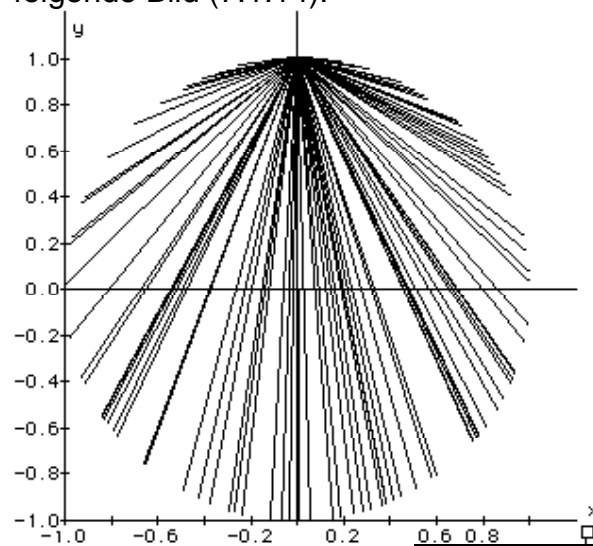
```

n = 2
MODELL
Phi = rnd(0)*2*Pi
x = sin(Phi)
y = cos(Phi)
Länge = sqrt((:x-x)^2+(y-y)^2)
k = k+1
Summe = Summe+Länge
Mittel = Summe/k
    
```

Bild 7.1.13

Lösung zu 2.

Mit den Startwerten $k(2) = 0$, $Summe(2) = 0$, der Einstellung *Wiederholt rechnen* mit Abbruchbedingung $k > 60$ ergibt sich bei eingeschalteter Zeichenautomatik aus dem Modell das folgende Bild (7.1.14):



n = 2	M O D E L L
Phi = If(n=1,0, rnd(0)*2*Pi)	
x = sin(Phi)	
y = cos(Phi)	
Länge = sqrt((:x-x)^2+(y-y)^2)	
k = k+1	
Summe = Summe+Länge	Bild 7.1.15
Mittel = Summe/k	

Anmerkung: Lösung 3 eignet sich noch zur exakten Lösung, die z. B. über derive ermittelt werden kann. Es ergibt sich

$$M = \frac{\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos\beta)^2 + \sin^2\beta} d\beta}{\int_0^{2\pi} d\beta} = \frac{4}{7}$$

für den Einheitskreis.

Lösung zu 3.

Nach dem Durchrechnen der Tabelle mit den Spalten x und y wird der zugehörige Polygonzug gezeichnet (Bild 7.1.16).

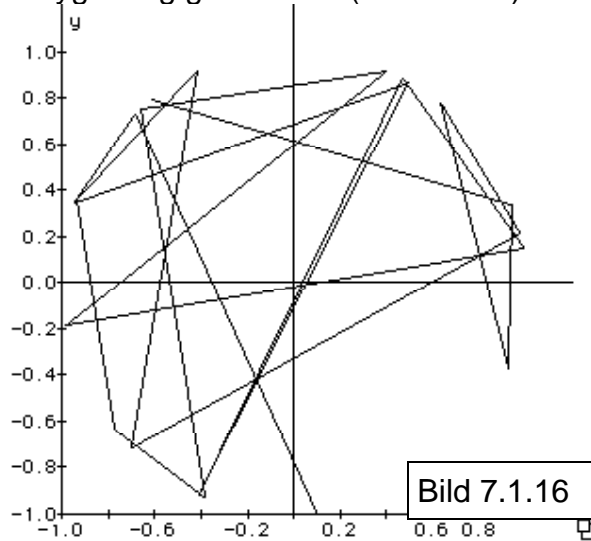


Bild 7.1.16

n = 30	Bild 7.1.17	
Phi = rnd(0)*2*Pi		
x = sin(Phi)		
y = cos(Phi)		
Länge = sqrt((:x-x)^2+(y-y)^2)		
k = :k+1; k(1)=0		
Summe = S(Länge,0)		
Mittel = Summe/k		

Lösung zu 4.

Mit den Startwerten $k(2) = 0$, $Summe(2) = 0$, der Einstellung *Wiederholt rechnen* mit Abbruchbedingung $k > 60$ ergibt sich bei eingeschalteter

Zeichenautomatik aus dem Modell das folgende Bild (7.1.18).

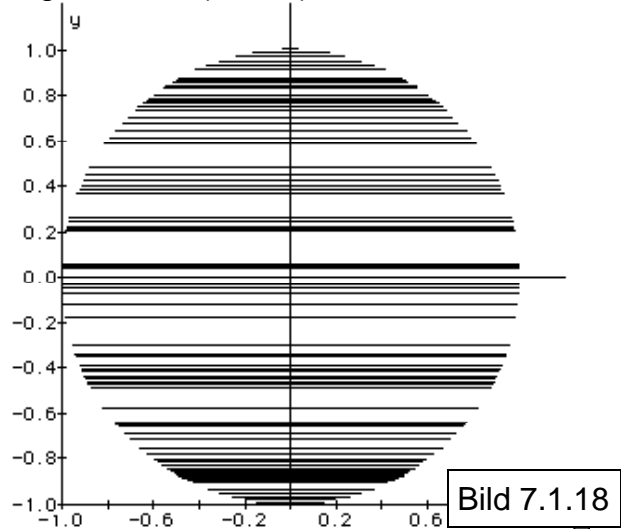


Bild 7.1.18

n = 2	M O D E L L
Phi = if(n mod 2 = 1, rnd(0)*2*Pi,:Phi); Phi(1)=1.0924027	
x = if(n mod 2 = 1, cos(Phi), -cos(Phi))	
y = sin(Phi)	
Länge = sqrt((:x-x)^2+(y-y)^2)	
k = k+1	
Summe = Summe + Länge	Bild 7.1.19
Mittel = Summe/k	

Als Ergebnis erhält man

$$Mittel_1 = Mittel_2 = Mittel_3 = Mittel_4.$$

Weitere Aufgabe: Bestimme die mittlere Länge eines zufälligen Streckenzuges im Einheitsquadrat.

7.2 Monte Carlo Würfe zur Lösung von Flächen- und Raumproblemen

7.2.1 Fläche unter einer Normalparabel

Aufgabe

Bestimme die Fläche eines von einer Normal-Parabel begrenzten Flächenstücks mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode.

Lösung

In der Zeichnung (Bild 7.2.1) ist die Normalparabel gezeigt, die in ein Rechteck mit den Seiten b und b^2 hineingezeichnet ist. Auf der Rechteckfläche werden zufällig z Punkte gewählt. t davon liegen im Flächenstück F . Dann gilt: die Flächeninhalte der Figuren verhalten sich wie die Zahlen der Punkte innerhalb der Figuren, also

$$F : \text{Rechteckfläche} = t : z$$

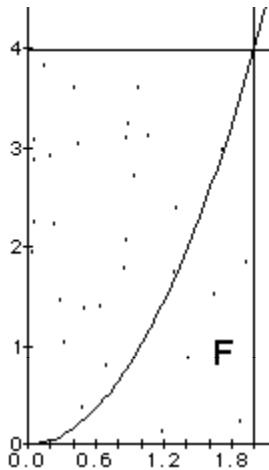


Bild 7.2.1

```

n = 500
x = Zufall(r)
y = Zufall(r^2)
z = :z+1; z(1)=0
t = if(y<x^2, :t+1, :t); t(1)=0
F = 2*4*t/z
    
```

Bild 7.2.2

Zusammen mit den Vereinbarungen $r = 2$ und $Zufall(r) = r * \text{rnd}(0)$ ergibt sich daraus

eine Schätzung der Fläche F (vgl. den folgenden Graphen, Bild 7.2.3).

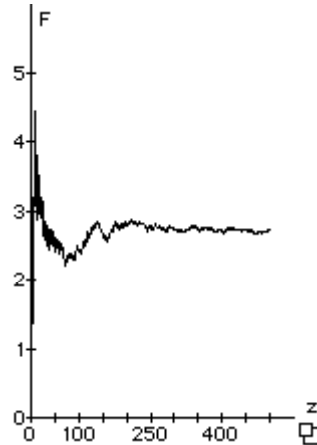


Bild 7.2.3

Weitere Aufgaben

- Bestimme die Fläche zwischen Parabel $y = x^2$, y-Achse und Gerade $y = 2$.
- Bestimme die Fläche zwischen Parabel $y = x^2(3 - x)$ und der x-Achse. Hinweis: Verwende im Quadrat $A(0|0)$, $B(3|0)$, $C(3|3)$, $D(0|3)$ die Zufallspunkte P mit $Zufall(3)$.
- Bestimme die Fläche zwischen dem Viertelkreis $y = \sqrt{4 - x^2}$, der x-Achse und der y-Achse. Verwende das Quadrat $A(0|0)$, $B(2|0)$, $C(2|2)$ und $D(0|2)$.

7.2.2 Kegelvolumenbestimmung in der Monte-Carlo-Methode

Aufgabe

Bestimme das Volumenverhältnis eines geraden Kreiszyllindes zum einbeschriebenen Kreiskegel.

Lösung

Der Zylinder hat den Radius r und die Höhe h . Der Grundkreis liegt in der x-y-Ebene mit dem Ursprung als Mittelpunkt. Das Volumen des Zylinders ist V_z ,

das Volumen des Kegels V_k (Bild 7.2.4).

Schnitt von Kegel und Zylinder

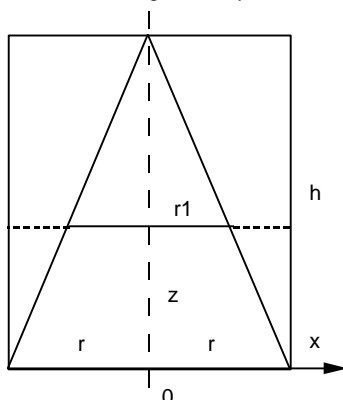


Bild 7.2.4

Ein Punkt $P(x|y|z)$ im Inneren des Zylinders liegt auf einer Parallelebene zur x - y -Ebene im Abstand z , die aus dem Kegel einen Kreis mit Radius r_1 ausschneidet. Offensichtlich ist

$$r_1 : r = (h - z) : h$$

(*) $r_1 = r \cdot (h - z) / h$

Nun werden s Zufallspunkte P im Zylinder betrachtet. t davon liegen auch im Kegel. Dann gilt für das Volumenverhältnis

$$c_v = V_k : V_z = t : s.$$

Realisierung

$rnd(0)$ ist eine gleichverteilte Zufallszahl im Intervall $[0,1]$. Damit konstruieren wir neue Zufallszahlen:

$$rd_1(r) = r - r \cdot rnd(0)$$

ist eine Zufallszahl im Intervall $[-r,r]$,

$$rd_2(h) = h \cdot rnd(0)$$

ist eine Zufallszahl im Intervall $[0,h]$.

Ein Zufallspunkt $P(x|y|z)$ wird folgendermaßen gebildet:

$$x = rd_1(r), y = rd_1(r), z = rd_2(h)$$

Die Bedingung, daß $P(x|y|z)$ im Zylinder bzw. Kegel liegt, lautet

im Zylinder: $x^2 + y^2 - r^2 < 0,$

im Kegel: $x^2 + y^2 - r_1^2 < 0$

und mit der Ersetzung aus Zeile (*)

$$x^2 + y^2 - r^2 \cdot (h-z)^2 / h^2 < 0$$

Realisierung

Man legt zunächst als Ergebnis der Analyse Funktionen im Vereinbarungsfenster fest und formuliert dann das Modell. Die nächsten Bilder (Bild 7.2.5 und 7.2.6) zeigen das Modellblatt und das Vereinbarungsbild. Das Durchrechnen erfolgt mit den Startwerten $s(1)=0, t(1)=0$, sowie mit den Einstellungen „Wiederholt rechnen, Abbruchbedingung $s > 300$ “ und „Zeichenautomatik mit Wahl v (erbinde Punkte)“.

Vereinbarungen

Tabellenkonstanten

$r = 1$	$h = 1$

Tabellenfunktionen : (Name = Term)

$rd1(r) = r - 2 \cdot r \cdot rnd(0)$	Bild 7.2.5
$rd2(h) = h \cdot rnd(0)$	
$Z(x,y) = x^2 + y^2 - r^2$	
$K(x,y,z) = x^2 + y^2 - r^2 \cdot (h-z)^2 / h^2$	

$n = 1$
$x = rd1(r)$
$y = rd1(r)$
$z = rd2(h)$
$s = if(Z(x,y) < 0, s+1)$
$t = if(K(x,y,z) < 0, t+1)$
$cv = t/s$

Bild 7.2.6

Als graphische Auswertung der Tabellenwerte zeigt die nächste Abbildung (Bild 7.2.7), daß der Quotient $c_v = \frac{t}{s}$ gegen $\frac{1}{3}$ geht.

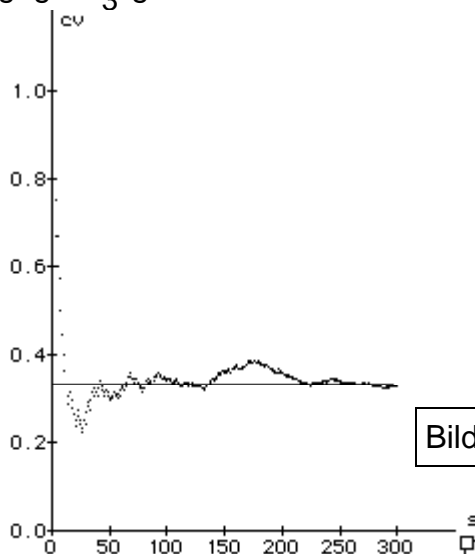


Bild 7.2.7

7.3 Random Walk - Spaziergänge zu den Lösungen

7.3.1 Zufallsspaziergang auf der Ebene - Brownsche Bewegung

Der Zufallsspaziergang auf der Ebene $E(a,b)$ ergibt sich durch einen zufälligen Schritt in Richtung a und b . Der jeweils neue Ort des Zufallspunktes ergibt sich durch Addition der Schrittweite zum Ausgangspunkt. Man vereinbart die Funktion $Zufall(r) = r - 2 \cdot r \cdot \text{rnd}(0)$. Nach dem Durchrechnen der Tabelle mit den Spalten a und b wird der Polygonzug der Schritte gezeichnet.

```
n = 150
a = :a+Zufall(1); a(1)=0
b = :b+Zufall(1); b(1)=0
Distanz = sqrt(a^2+b^2)
k = :k+1; k(1)=0
```

Bild 7.3.1

Mit dem Modell ergibt sich obiges Bild. Man erkennt die Zufallswanderung eines Punktes. Sie kann gedeutet werden als die Wanderung eines im Mikroskop erkennbaren Teilchens in einem Gas, das von den submikroskopischen Teilchen seiner Umgebung zufällige Stöße erhält. In den Bewegungen der submikroskopischen Teilchen zeigt sich ihre kinetische Energie und damit indirekt die Temperatur des Gases.

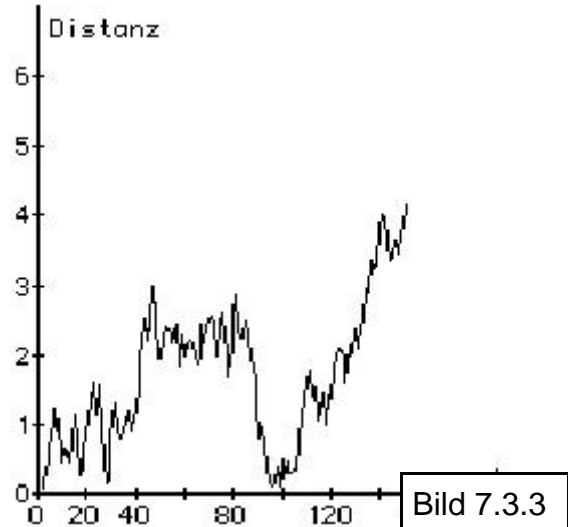


An die Simulation der Brown'schen Bewegung können sich interessante

Fragen nach der Art der Bewegung stellen.

1. Wie entwickelt sich die Distanz des Teilchens vom Ursprung?
2. Wie lange sind die zurückgelegten Wege im Mittel?

Die Lösung von 1. führt zu folgendem Bild:



7.3.2 Simulation einer Diffusion

Aufgabe:

Es werde die Wanderung von 50 Molekülen in einer Emulsion simuliert. Sie seien zum Start alle im Koordinatenursprung versammelt. Berechne das mittlere Abstandsquadrat und trage es gegen die „Zeit“ auf.

Lösung:

Eine Tabelle mit 50 Zeilen und den Spalten x, y wird zunächst mit 0 vorbelegt. Dann berechnen wir 50mal den neuen Zustand jedes Punktes, der mit einer Zufallswanderung verschoben wird, und berechnen für jeden Punkt seine neue Entfernung vom Ursprung. Die Beobachtungszeit wird einfach durch

eine Zählvariable simuliert.

```
n = 50
x = x+(rnd(0)-0.5)
y = y+(rnd(0)-0.5)
Abstand = sqrt(x^2+y^2)
Mittelwert = avg(Abstand^2)
Versuche = Versuche+1
```

Bild 7.3.4

Das folgende Bild gibt die Auswertung eines Versuches wieder. Man kann erkennen, daß das mittlere Verschiebungsquadrat proportional zur Beobachtungsdauer ist (Theorie der Brown'schen Bewegung nach A. Einstein, z. B. Physik, Gerthsen, Kneser, Vogel 13. Auflage 1977, S.167).

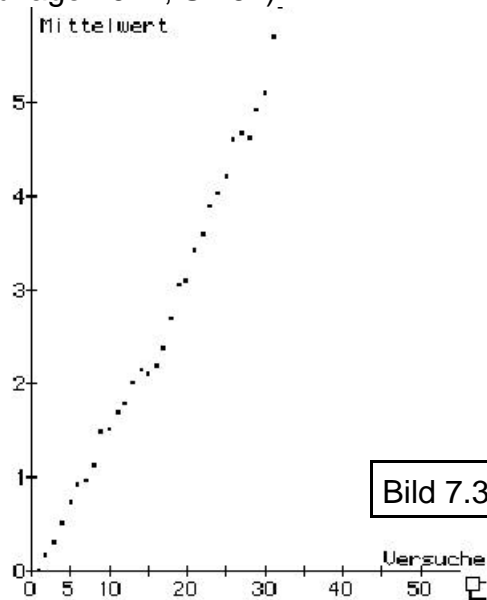


Bild 7.3.5

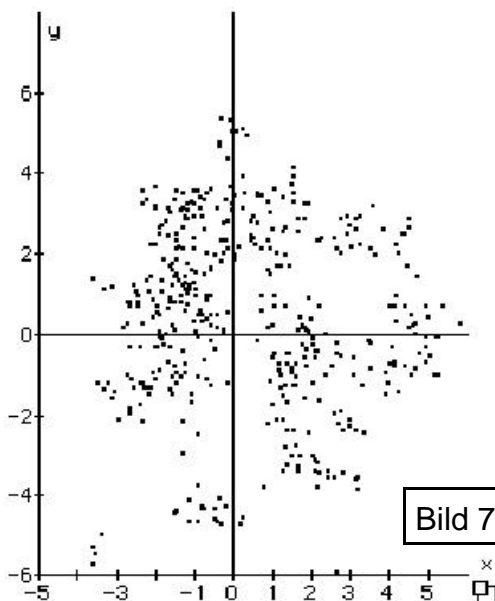


Bild 7.3.6

Interessant ist auch eine andere Auftragsung, nämlich die aller Punkte im x-y-Koordinatensystem. Das obige Bild zeigt die Punktwolke vom 60. bis zum 65. Versuch.

7.3.3 Minimumsuche mit dem Zufallsspaziergang

Hat eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ein Minimum in x_0 , so gilt für alle x aus einer Umgebung von x_0 die Bedingung $f(x) \geq f(x_0)$. Diese Bedingung nutzen wir zur Konstruktion einer Folge x_n von Zufallszahlen, die sich dem gesuchten Minimum annähert.

Für die Konstruktion der Folge benötigt man eine Hilfsvariable $u = x_n + z(r)$, wobei $z(r)$ eine zufällig gewählte Zahl mit $-r \leq z(r) \leq r$ ist, u liegt also in einer r -Umgebung von x_n und hat den Abstand $z(r)$. Nun kann u näher beim gesuchten Minimum x_0 liegen oder aber nicht. Deshalb definieren wir

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n, & \text{falls } f(u) \geq f(x_n) \\ u, & \text{falls } f(u) < f(x_n) \end{cases}$$

```
n = 25
r = :r*0.95; r(1)=2
u = :x + z(r)
x = if(f(u)<f(:x),u,:x); x(1)=-3
y = f(u)
```

Bild 7.3.7

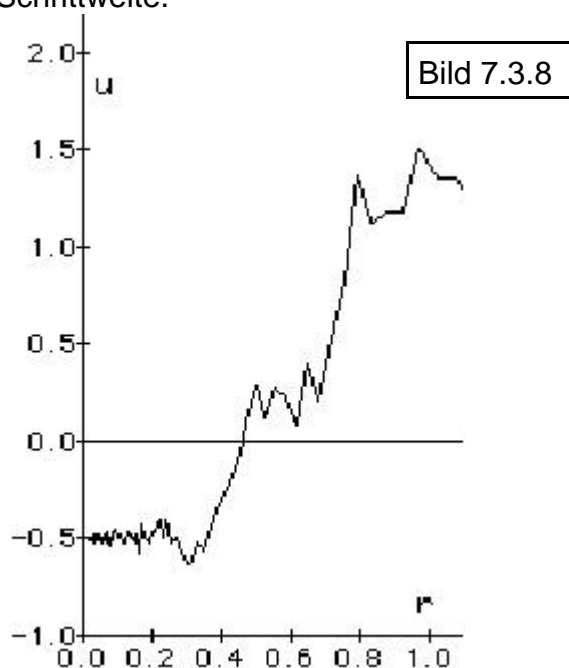
Der Algorithmus wird uns also sicherlich immer in Richtung auf das Minimum zubewegen. Würden wir jedoch mit festem Umgebungsradius r arbeiten, so würde sich die Folge dem Zahlenwert x_0 nur langsam annähern. Also sorgen wir dafür, daß mit der Annäherung auch gleichzeitig der Suchradius r schrumpft.

$r_{n+1} = r_n \cdot 0.95$ liefert eine geometrische Reihe, mit der der Suchradius gegen 0 geht. Mit der Definition

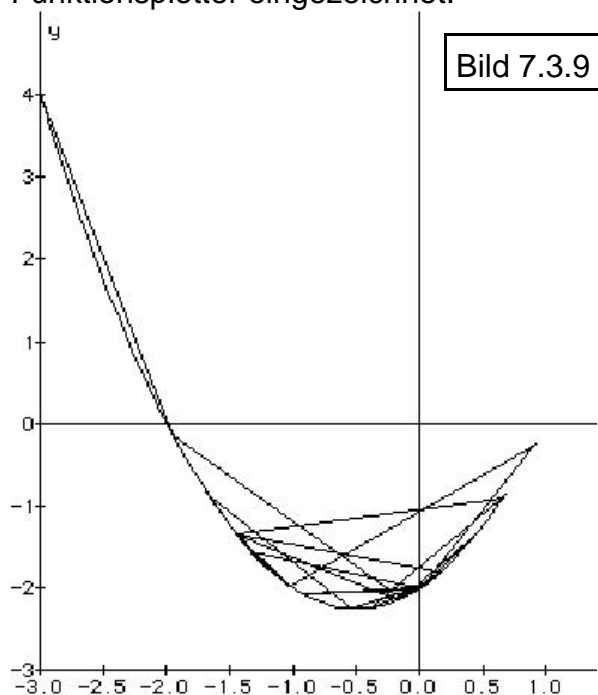
$$z(r) := 2r \cdot (\text{rnd}(0) - 0.5)$$

haben wir eine Funktion, die Zufalls-
 werte aus einem Intervall $]-r ; r[$ liefert
 und dies dann in der Modellrechnung mit
 schrumpfendem Radius.

Das folgende Bild zeigt das Resultat
 einer Simulationsrechnung, bei der für
 die Funktion $f(x) = (x-1) \cdot (x+2)$ die
 Werte der Hilfsvariablen u gegen r
 aufgetragen ist. Man erkennt die Konver-
 genz von u gegen das Minimum bei $x =$
 -0.5 bei gleichzeitig kleiner werdender
 Schrittweite.



Im nächsten Bild ist u gegen die Funkti-
 onswerte $f(u)$ aufgetragen. Man erkennt,
 wie sich die Hilfsfolge auf der Parabel
 mit immer geringerer Schrittweite an das
 Minimum herantastet. Zur Orientierung
 ist noch die Funktion f mit Hilfe des
 Funktionsplotter eingezeichnet.



7.4 Optimieren durch stochastisches Suchen

7.4.1 Optimale Lage eines Bahnhofs

Aufgabe: Ein Bahnhof B soll so gelegt werden, daß sein Abstand von zwei Orten A und C minimal wird.

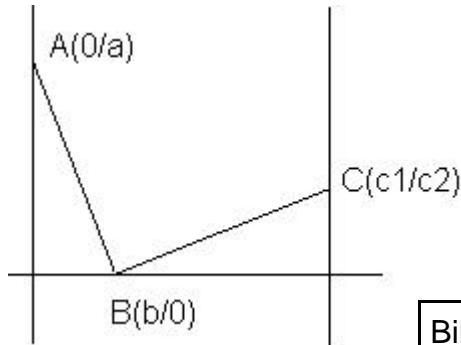


Bild 7.4.1

Mathematische Lösungsidee:

$d = |AB| + |BC|$ ist die Länge des Fahrwegs. b soll so verändert werden, daß d minimal wird.

Man beginnt mit einem beliebigen b und berechnet $d(b)$. Dann ändert man b zufällig ein wenig und bekommt ein neues b_1 . Ist die neue Abstandssumme besser, d. h. kleiner als die alte, dann ersetzen wir das alte b durch das neue b_1 . Nun wird der ganze Vorgang wiederholt.

Lösung

Zwei Fragen sind noch zu klären: Erstens, wie ändert man b zufällig und zweitens, wann hört man mit der Wiederholung auf?

Eine Zufallsfunktion $z(r)$ soll für jedes positive r eine Zahl z liefern, die im Intervall $-r < z < r$ gleichverteilt ist ($z(r) := 2r \cdot (\text{rnd}(0) - 0.5)$). Die zufällige Änderung von b lautet dann

$$b_{\text{Test}} := b_{\text{alt}} + z(r).$$

b_{Test} wird dadurch höchstens um den Wert r (Zufallsradius) geändert. Wenn

man sich schon nahe beim Extremwert befindet, sollen die Änderungen von b nicht mehr so groß sein als wenn man noch weit weg ist. Deshalb lassen wir nach jeder Wiederholung den Zufallsradius um 5% schrumpfen:

$$r_{\text{neu}} := 0.95 \cdot r_{\text{alt}}$$

Dadurch steigt auch die Trefferwahrscheinlichkeit für nahe gelegene Punkte. Als Abbruchkriterium für die Wiederholung bietet sich an

$$r < r_0$$

Dabei kann r_0 die Genauigkeit festlegen mit der b bestimmt werden soll.

Mit den Vereinbarungen

```
a=8    c1=10    c2=5    r0=0.001
und den vereinbarten Funktionen
z(r)=r*(rnd(0)-0.5)*2
dist(b)=sqrt(b^2+a^2) + sqrt((c1^2-b^2) + c2^2)
```

rechnet man das folgende Modell

Bild 7.4.2

M O D E L L	
n = 150	
r = :r*0.95; r(1)=20	
bTest = :b + z(r)	
Abstand = dist(bTest)	
b = if(Abstand < :Abstand, bTest, :b); b(1)=0	

Das Diagramm zeigt das Versuchsergebnis. Zur Kontrolle: Für die gewählten Konstanten ist das exakte Ergebnis

$$b = \frac{80}{13} \approx 6.153846.$$

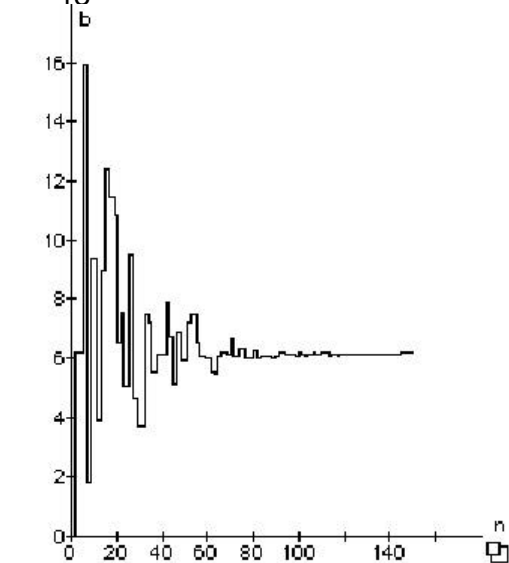


Bild 7.4.3

Weitere Aufgaben:

- Die Lage der Orte A und C verändern

- Den Startort für B verändern
- Den Startwert für den Zufallsradius r verkleinern und die Folgen für das Endergebnis abschätzen
- Den Zufallsradius r konstant, d.h. nicht schrumpfen lassen
- Ein anderes Verfahren für die zufällige Veränderung von b probieren

7.4.2 Kürzester Abstand zu den Dreiecksseiten

Aufgabe

Suche in einem gegebenen Dreieck den Punkt, für den die Summe der Abstände von den drei Seiten minimal ist.

Mathematisierung

Die Ecken des Dreiecks sind z. B. $A(0|0)$, $B(15|0)$, $C(3.75|7.5)$. Die Geradengleichungen für die Seiten lauten dann:

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ y &= 2x \\ y &= (30 - 2x) / 3 \end{aligned}$$

Die Abstände eines Punktes $P(x|y)$ von den drei Seiten sind

$$\begin{aligned} d_1 &= y \\ d_2 &= \frac{(2x-y)}{\sqrt{5}} \\ d_3 &= \frac{(2x+3y-30)}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

Lösungsidee

Wir verwenden das Prinzip „Mutation und Auslese“.

Mutation: Die Lage des Punktes P zum jetzigen Zeitpunkt wird zufällig ein wenig geändert (mutiert). Man erhält so den Punkt Q .

Auslese: Falls die neue Lage Q gleich gut oder eine Verbesserung gegenüber der alten Lage P ist, wird die alte Lage ausgelesen, d. h. P wird durch Q ersetzt.

Lösung: Für $r > 0$ ist $z(r)$ eine Zufallszahl mit $-r < z(r) < r$. Der Punkt $P(x|y)$ mutiert zu $Q(u|v)$ mit $u = x + z(r)$ und $v = y + z(r)$.

Die Auslesefunktion lautet:

$$\text{dis}(x, y) = |y| + \left| \frac{(2x-y)}{\sqrt{5}} \right| + \left| \frac{(2x+3y-30)}{\sqrt{13}} \right|,$$

wobei $\text{dis}(x,y)$ verkleinert werden soll.

Um die Konvergenz zu verbessern, soll der Zufallsradius r nach jedem Mutationsschritt um 2% verkleinert werden.

```
n = 15
r = r*0.98; r<1)=3
u = :x+z(r)
v = :y+z(r)
d0 = dis(:x,:y)
d1 = dis(u,v)
x = if(d1<d0, u, :x); x<1)=12
y = if(d1<d0, v, :y); y<1)=5
```

Bild 7.4.4

Nachdem die 15 Mutationsschritte berechnet sind, zeichnet man die Bahn die der Punkt (x,y) gewandert ist. Das erstaunliche Ergebnis ist, daß der Punkt immer in die Ecke mit der kürzesten Höhe wandert.

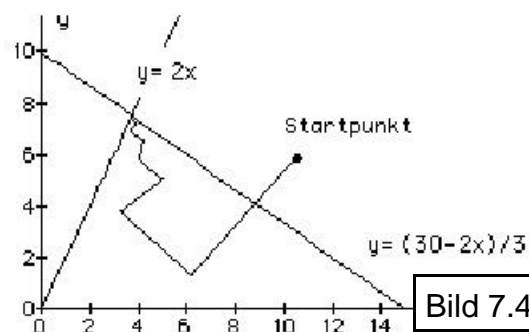


Bild 7.4.5

Weitere Aufgaben:

1. Wähle einen anderen Startpunkt.
2. Beschleunige das Schrumpfen des Zufallsradius.
3. Wähle ein gleichseitiges Dreieck für das Experiment und interpretiere das seltsame Ergebnis.

Hinweis: Seiten $y = 0, y = \sqrt{3} - x, y = -\sqrt{3} - x + 10\sqrt{3}$; Abstände $d_1 = y, d_2 = \frac{\sqrt{3}-x-y}{2}, d_3 = \frac{\sqrt{3}-x+y-10\sqrt{3}}{2}$;

Startpunkt außerhalb des Dreiecks wählen!

7.4.3 Stabilitätspunkt dreier Federn

Aufgabe

Drei gleichstarke Federn mit der Federhärte D , die mit einem Ende an einem gemeinsamen Punkt P angreifen, sind mit dem anderen Ende jeweils im Eckpunkt eines Dreiecks befestigt. Wo liegt der Gleichgewichtspunkt P ?

Mathematisierung

P liegt dort, wo die Spannungsenergie W ihr Minimum hat. $W = \frac{1}{2}D(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)$, wobei s_1 , s_2 und s_3 die Dehnungen der drei Federn sind und D die gemeinsame Federkonstante ist. Die Abstände errechnen sich mit dem Satz des Pythagoras.

Lösungsidee

Das Lösungsprinzip könnte man auch als „trial and error“ bezeichnen. Man verschiebt den Punkt P versuchsweise zunächst ein wenig und wertet den Versuch als Irrtum, wenn die Spannungsenergie nicht kleiner wird.

Lösung

Für $r > 0$ ist $z(r)$ eine Zufallszahl mit $-r < z(r) < r$. Die versuchsweise Verschiebung des Punktes $P(x|y)$ ergibt den Punkt $Q(u|v)$ der sich mit $u = x + z(r)$ und $v = y + z(r)$ errechnet.

Die Ecken des Dreiecks ABC seien $A(0|0)$, $B(b|0)$ und $C(c|d)$. Die Spannungsenergie für den Punkt P ist dann

$$W = 0.5 \cdot D \cdot (\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-b)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2})$$

Der Zufallsradius r soll nach jedem Versuch um 5% verkleinert werden.

Das Modell rechnet nach folgenden Eingaben 150 Zeilen, wobei im Vereinbarungsfenster die Eingabe der Funktion

$W(x,y)$ und der Konstanten b , c und d erfolgt ist.

```
n = 150
r = :r*0.95; r(1)=2
x = if<:W1<:W0, :u, :x; x(1)=0
y = if<:W1<:W0, :v, :y; y(1)=0
u = x + z(r)
v = y + z(r)
W0 = W(x,y)
W1 = W(u,v)
```

Bild 7.4.6

Mit dem Funktionsplotter zeichnet man das Dreieck. Die Gleichungen der Seiten lauten:

$$y = 0; y = d/c * x; y = (x - b) * d / (c - b).$$

Diese Geraden werden mit dem Funktionsplotter eingezeichnet, die Bewegung des Punktes $(x|y)$ von verschiedenen Startpunkten aus mit dem Werkzeug „Aktuelle Graphik“ gezeichnet. Die Endlage von P liest man am besten aus der Tabelle ab. Es ergeben sich die Werte

$$x = 4.07 \text{ und } y = 2.67.$$

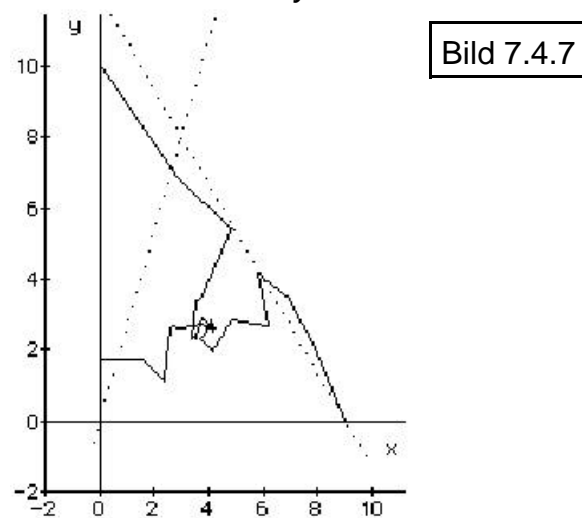


Bild 7.4.7

Weitere Aufgaben:

- Weitere Startpunkte für die "trial and error"-Reise wählen.
- Modell erstellen für verschieden harte Federn.
- Physikalisches Experiment aufbauen und die Realität beobachten und mit den Ergebnissen der Modellrechnung vergleichen.

7.5 Systeme mit festen Übergangswahrscheinlichkeiten

7.5.1 Die Geschichte vom Nachbarn und den faulen Kirschen

Nehmen wir an, daß zwei Nachbarn in Frieden leben und jeder seinen Kirschaum pflegt, daß aber zur Kirschenernte die heruntergefallenen faulen Kirschen entfernt werden müssen. Am bequemsten ist es, sie einfach in Nachbars Garten zu werfen.

Nehmen wir nun ferner an, daß Nachbar 1 ($N1$) zu einem bestimmten Zeitpunkt 60% seiner faulen Kirschen zu Nachbar 2 ($N2$) wirft, Nachbar 2 zum selben Zeitpunkt 20% seiner faulen Kirschen zu Nachbar 1 wirft.

Aufgabe

Wie entwickelt sich die Kirschen-schlacht?

Zunächst machen wir ein mathematisches Modell vom Vorgang.

Die neue Kirschenzahl von $N1$ ist
 $N1_{neu} = N1_{alt} - 60\% \cdot N1_{alt} + 20\% \cdot N2_{alt}$
 $N2_{neu} = N2_{alt} - 20\% \cdot N2_{alt} + 60\% \cdot N1_{alt}$

In der Syntax von Vivitab:

```
n = 30
N1 = #N1-0.6*#N1+0.2*#N2; N1(1)=90
N2 = #N2-0.2*#N2+0.5*#N1; N2(1)=20
```

Bild 7.5.1

Das Modell wurde durchgerechnet unter der Annahme, daß 100 Kirschen im Spiel sind und zunächst bei $N1$ 80 Stück liegen und bei $N2$ 20 Stück. Der Verlauf zeigt, daß sich die am Boden liegenden Kirschmengen verschieben und ihre Summe abnimmt.

n	N1	N2
30	#N1-0. #N2-0.	
1	90	20
2	40	61
3	28.2	68.8
4	25.04	69.14
5	23.844	67.832
6	23.104	66.187
7	22.479	64.502
8	21.892	62.841
9	21.325	61.219
10	20.773	59.637
11	20.237	58.097
12	19.714	56.596
13	19.204	55.134
14	18.708	53.709
15	18.225	52.322
16	17.754	50.970

Bild 7.5.2

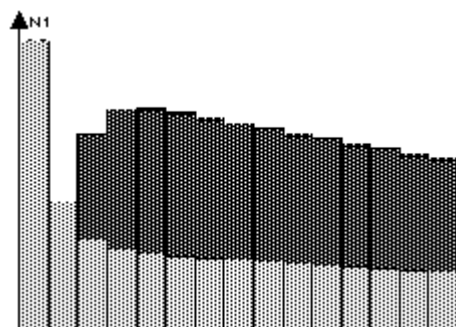


Bild 7.5.3

7.5.2 Weitere Aufgaben

- Variiere die Startzahlen und beobachte die Werte, auf die sich die Kirschenzahlen einpendeln.
- Variiere für bestimmte Startwerte die %-Werte der geworfenen Kirschen.

Theorie

Versuche die Zahlen $N1$ und $N2$ für große n theoretisch zu errechnen. (Hinweis: Formuliere die Modellzeilen als Folgen und gehe davon aus, daß man für große n zwei aufeinanderfolgende Folgenglieder gleich setzen kann.)

8 Fächerübergreifende Themen

8.1 Wie Bilder laufen lernen - Zur Didaktik der dynamischen Modellierung

8.1.1 Stundenbild nach Spektrum der Wissenschaft, November 1989

Thema: „Veränderungen der Kohlendioxid-Konzentration in der Atmosphäre“

Vorgelegt sei das Bild 8.1.1, das dem Spektrum der Wissenschaft, Heft 11, November 1989, S. 73, entnommen ist.

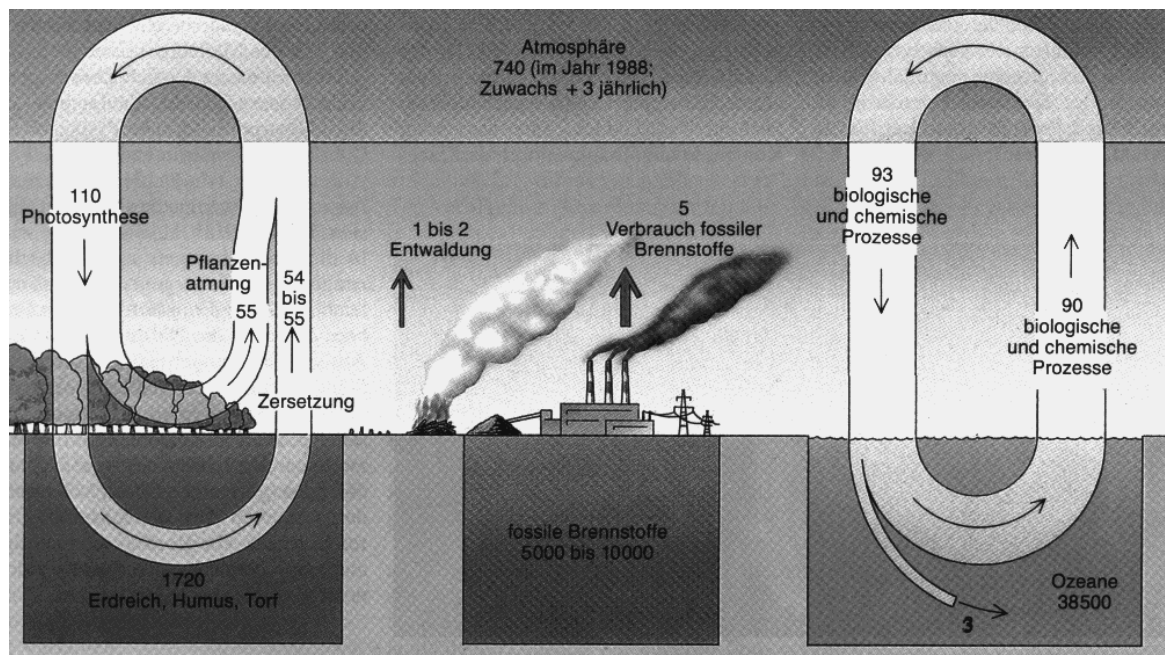


Bild 8.1.1

Der Mathematikunterricht sieht sich nicht nur den „zeitlosen“ Universalien des Denkens verpflichtet. Die „gute Textaufgabe“, die bisher das „aktuelle Leben“ in die Mathematikstunde bringen sollte und nebenbei auch motivierte, erhält in der „computergestützten Thema-Stunde“ eine aktuelle methodische Variante. Stärker als früher liefern andere Fächer die Themenstellung. Schön wäre es, wenn in der Gegenrichtung Erkenntnisse aus der mathematischen Analyse oder der Umgang mit den modernen Werkzeugen für das dynamische Modellieren sich für den Unterricht der Kollegen in den anderen Fächern als hilfreich erwiese.

Es zeigt in vereinfachter Form die Prozesse, die zum Gleichgewicht der Konzentration von Kohlendioxid in der Atmosphäre beitragen. Genannt werden als Eintrager bzw. Resorbierer von Kohlenstoff in Form von Kohlendioxid in die Atmosphäre (alle Angabe in Milliarden Tonnen (Mrdt)):

- die Zivilisation durch die Nutzung fossiler Energiequellen +5 Mrdt zusätzlich durch Entwaldung +1 bis 2 Mrdt
- Zersetzungs Vorgänge im Boden mit Ausgasungen +55 Mrdt
- Kohlendioxid-Aufnahme und Abgabe durch die Pflanzenwelt führt zu einer Absorption von -55 Mrdt Kohlendioxid aus der Atmosphäre

- Kohlendioxid-Diffusion und Absorption in den Weltmeeren bei derzeit überwiegender Absorption zu einer Absorption von -3 Mrdt, die zum Teil in die Sedimente absinken

Man errechnet aus den Angaben dieses statischen Bildes leicht, daß die Atmosphäre eine jährliche Nettozufuhr von 3 Mrdt Kohlendioxid erfährt.

Wichtig sind auch die angegebenen Potentialzahlen von geschätzten 1720 Mrdt Kohlenstoff im Erdreich, 5000 bis 10000 Mrdt in fossilen Brennstoffen, 38500 Mrdt im Wasserkörper der Ozeane und nur (!) 740 Mrdt in der Atmosphäre. Schon diese Zahl im Vergleich zu den anderen Potentialen weist auf die Sensibilität der Atmosphäre im Kreislaufprozeß des Kohlenstoffs hin.

Die nächsten beiden Bilder (8.1.2 und 8.1.3) beschreiben Veränderungen der Kohlendioxidkonzentration in der Erdatmosphäre. Bild 8.1.2 zeigt ein stetiges Anwachsen der Kohlendioxidkonzentration von 290 ppm 1850 bis 340 ppm 1990.

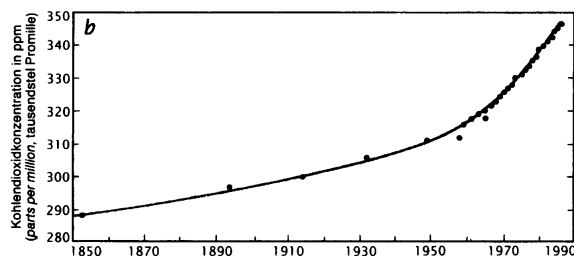


Bild 8.1.2: Kohlendioxidkonzentration in ppm von 1850 bis 1990

Das zweite Bild vergrößert den Ausschnitt zwischen 1958 und 1976 und weist auf die rhythmische Einwirkung der sommerlichen Pflanzenwelt der nördlichen Hemisphäre hin.

Während Bild 8.1.1 den Austausch und das Fließgleichgewicht des atmosphärischen Kohlenstoffs beschreibt, zeigen Bild 8.1.2 und 8.1.3 auf, daß sich der

Aufbau der Atmosphäre mit der Zeit dynamisch ändert.

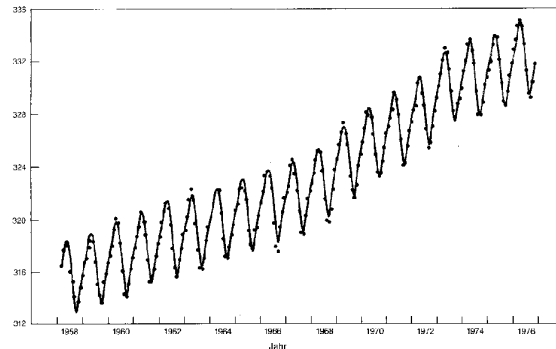


Bild 8.1.3: Entwicklung des Kohlendioxidgehalts seit 1958 mit jahreszeitlichen Schwankungen

8.1.2 Die Unterrichtsfrage

Wodurch kommt die Dynamik in der Konzentrationskurve des Kohlendioxids zustande? Offensichtlich ist der zivilisatorische Beitrag in zweifacher Weise entscheidend:

Durch die Eingriffe in den Bios wird der Austausch zwischen Photosynthese und Atmosphäre verändert und durch Eingriffe in die Vorräte an fossilen Kohlenstoffen wird gebundener Kohlenstoff wieder an die Atmosphäre zurückgegeben. Dieser kulturelle Eingriff in die Austauschströme zwischen Vorräten an gebundenem Kohlenstoff und atmosphärischem Kohlenstoff hängt zweifellos mit der Dynamik der Bevölkerungsentwicklung der Erde zusammen.

Die nächsten Bilder zeigen die Entwicklung der Erdbevölkerung seit 1775, Sterbe- und Geburtenziffern getrennt nach Entwicklungsländern und Industrienationen. Und ferner die Entwicklung der Gesamtpopulation der Erdbevölkerung in Milliarden von 1950 bis 1990 und eine Extrapolationsrechnung mit drei verschiedenen Szenarien: Wachstumsraten verändern sich bis 2025 von 1,74 (1990), wie man es dem Bild 8.1.4 entnimmt auf rechnerische 0,59 (untere Variante Bild 8.1.5) auf 0,98 (mittlere

Variante Bild 8.1.5), auf 1,9 (obere Variante Bild 5). Letztere Variante würde bis 2025 zu einer Weltbevölkerung von 9,4 Mrd. führen.

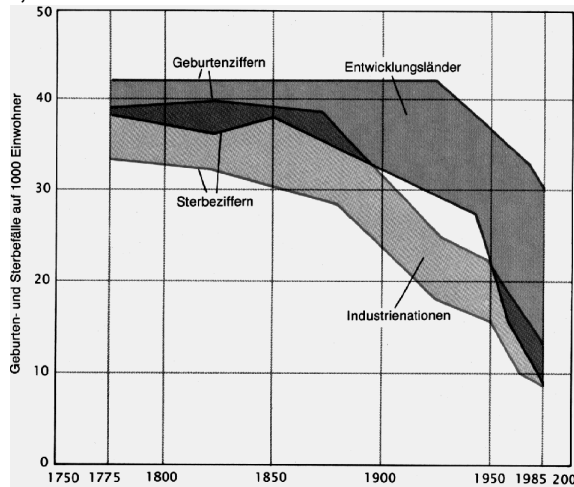


Bild 8.1.4: Geburten und Sterbefälle auf 1000 Einwohner von 1775 bis 1985, nach Spektrum der Wissenschaft

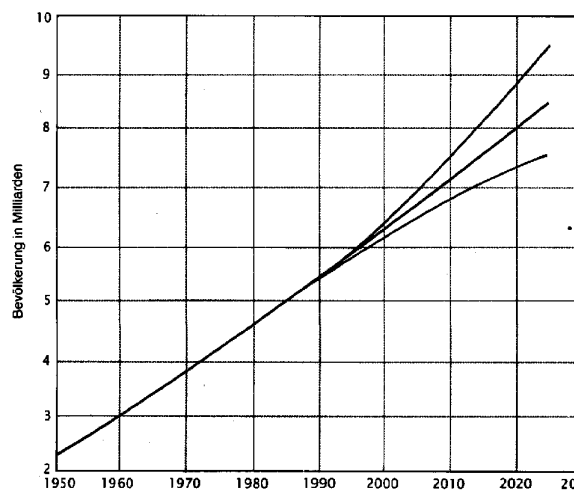


Bild 8.1.5: Erdbevölkerung in Milliarden mit 3 Szenarien von der DIESA (Population Division of the United Nations Department)

Für den Unterricht ist es schon eine interessante Frage, wie sich aus den Annahmen die Szenarien ergeben. Man kann in der Mathematikstunde mit wenigen Rechenschritten oder mit dem Computer als Werkzeug die Szenarien in diesen einfachen Fällen nachvollziehen.

Der Unterricht könnte sich z. B. längs der folgenden Aufgaben entwickeln:

Die Differenz zwischen Geburten- und Sterbeziffern, bezogen auf die ganze Erdbevölkerung, war 1990:

$$a = g - d = 1,74\%$$

- Berechne die Bevölkerungsentwicklung unter der Annahme, daß a konstant bleibt von 1990 - 95.
- Wie sieht der Algorithmus aus, wenn die Bevölkerungspolitik ab 2000 das Wachstum a auf die Hälfte beschränken kann.
- Rechne die Szenarien von 1990 bis 2050 und trage sie in die Graphik ein. Entnimm der Graphik, wann sich die Erdbevölkerung jeweils verdoppelt hat.

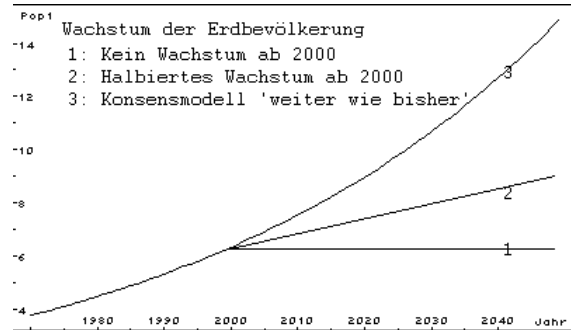


Bild 8.1.6 Szenarien über das Wachstum der Erdbevölkerung

Mit den Überlegungen zur Bevölkerungsentwicklung hat man gleichzeitig den Schlüssel zur dynamischen Betrachtung der Kreisläufe von Bild 8.1.1.

Die entscheidende theoretische Annahme: Der zivilisatorisch bedingte Kohlenstoffeintrag in die Atmosphäre ist proportional zur Erdbevölkerung. Für die Modellklarheit fassen wir die Modellannahmen zusammen:

Modell 1: Konsensmodell („alles so wie bisher, einfach weiter“)

Annahme 1: Das Wachstum der Weltbevölkerung kann nicht beeinflusst werden und wächst mit 1,74%.

Annahme 2: Der Verbrauch fossiler Brennstoffe hängt auch in der Zukunft von der Entwicklung der Weltbevölkerung ab, also eine Verdopplung dieser bedeutet auch eine Verdopplung des Verbrauchs fossiler Brennstoffe.

Annahme 3: Auf Grund von Abholzungen im nördlichen Nebelwald und im tropischen Urwald mindert sich die Waldfläche um jährlich 0.01% und verringert somit den Beitrag der Photosynthese.

Die Syntax der Modellgleichungen ist Vivitab bzw. META (CoMet Verlag) angepaßt. Ein Doppelkreuz vor einer Variable bedeutet eine Referenz auf den Vorgängerwert. So wird z. B. $x_{n+1} = x_n + 1$ hier geschrieben als $\#x + 1$.

```
Jahr = #Jahr + 1; Jahr(1)=1950
                {Modellrechnungsjahre}
Pop = #Pop + #Pop*0.0174;
Pop(1)=2.4
                {Entwicklung der Erdbevölkerung ab 1950}
Area = #Area - #Area*0.005;
Area(1)=1
                {Entwicklung der Waldflächen ab 1950}
CKult = 5*Pop
                {jährlicher kulturbedingter Kohlenstoffeintrag}
CVerwesung = 54.5
                {Zersetzung in Erdreich, Humus, Torf}
CDiffusion = -3
                {Sedimentierung von Kohlenstoff in den Weltmeeren}
CPflanze = -Area*110+Area*55
                {Kohlenstoffbindung durch Pflanzenatmung}
CAtm = #CAtm + CKult + CVerwesung + CDiffusion + CPflanze; CAtm(1)=651
                {Bilanz der Kohlenstoffeinträge und Resorptionen aus d Atmosphäre}
CO2Konzentration = (310/651) * CAtm
```

Um auf den im Bild angegebenen Meßvergleichswert für die Kohlendioxidkonzentration zu stoßen, nehmen wir vereinfachend an, daß der Kohlenstoffgehalt der Atmosphäre und die Kohlendioxidkonzentration direkt proportional sind (z. B. wird der Anteil an Kohlenmonoxidgas und Methangas außer acht gelassen). Es gilt dann

$$y[\text{CO}_2 \text{ in ppm im Jahr } n] = (310[\text{CO}_2 \text{ ppm 1950}] / 651[\text{Mrdt C 1950}]) \cdot x[\text{Mrdt C im Jahr } n]$$

Als Modellgleichung also

$$\text{CO}_2\text{Konzentration} = (310/651) \cdot \text{CAtm}$$

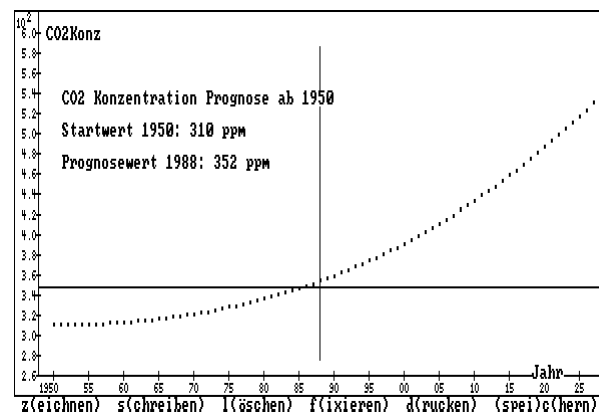


Bild 8.1.7: Ergebnis der Modellrechnung des Konsensmodells: CO₂-Konzentration

8.1.3 Was bringt uns die Modellrechnung?

Zunächst können wir unsere Modellrechnung, die ja 1950 begann, mit der tatsächlichen Entwicklung vergleichen und so sehen, ob unsere Modellannahmen überhaupt etwas taugen.

In der Graphik ist als gepunktete Linie die Modellrechnung eingetragen. Ausgangswert ist der Meßwert von 1950. Der Vergleich mit dem Meßwert von 1988 zeigt eine kleine Abweichung von Modellprognose und Meßwert: Das Modell prognostiziert 354 ppm CO₂, der

Meßwert, markiert durch das Fadenkreuz, ist 348 ppm CO₂.

Die Simulationsergebnisse und die Messung stimmen überraschend gut überein. Wir müssen also davon ausgehen, daß die weitere Entwicklung, wenn Sie den Annahmen 1, 2 und 3 unseres Szenariums folgt, tatsächlich zu einer Änderung des Gaskörpers unseres Planeten führen wird und sich damit Folgen für das Klima der Erde ergeben werden.

Was ist zu tun? Läuft diese Entwicklung für unseren Planeten bereits „aus dem Ruder“? Formulieren wir ein optimistisches Modell!

Modell 2: Optimistisches Modell

Annahme 1: Das Wachstum der Weltbevölkerung kann politisch beeinflusst werden und die Weltbevölkerung wächst ab 2000 mit nur noch 0.5%.

Annahme 2: Der Verbrauch fossiler Brennstoffe kann durch Technologischen Wandel von der Bevölkerungsentwicklung abgekoppelt und ab 2000 jährlich um 1% gesenkt werden.

Annahme 3: Die Abholzungen der Regenwälder konnte bis 2000 gestoppt und in eine konservierende Forstwirtschaft umgewandelt werden. Die nördlichen Staaten haben Ihre landwirtschaftliche Überproduktion zugunsten einer Aufforstung zurückgeführt und seit 2000 wächst die globale Waldfläche wieder um 0.5% pro Jahr.

Diese Annahmen sind sicherlich optimistisch. Wir müssen zusätzlich nun noch Annehmen, ab wann diese Rahmenbedingung die Entwicklung leiten.

Die politische Dimension ergibt sich aus der Frage: Was wäre, wenn ... ? Zum Beispiel:

... wenn die Rahmenbedingungen ab sofort herstellbar wären? Es ergibt sich der Kurvenverlauf 3 in Bild 8.1.8.

... wenn die Rahmenbedingungen wenigstens ab 2000 hergestellt werden könnten? Es ergibt sich der Kurvenverlauf 4 in Bild 8.1.8.

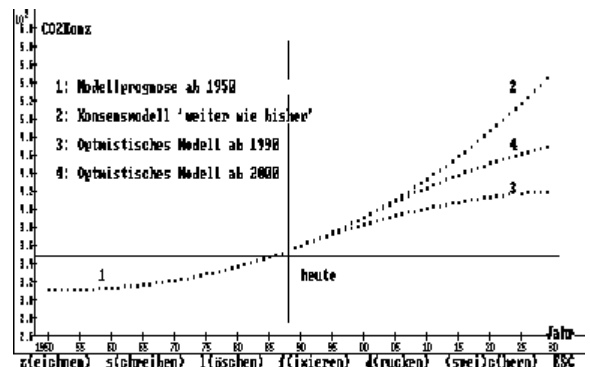


Bild 8.1.8: Szenarienrechnung zur CO₂-Konzentration

Im Vergleich zum Konsensmodell, dargestellt durch Kurvenverlauf 2 in Bild 8.1.8, sind die Wirkungen politischen Handelns deutlich erkennbar.

Die mathematische Umsetzung des Optimistischen Modells ist im Grunde lediglich die Einführung einer „if-then-else“-Anweisung in das bereits erarbeitete Modell. So wird aus der Zeile

$$\text{Pop} = \# \text{Pop} + \# \text{Pop} \cdot 0.0174;$$

$$\text{Pop}(1) = 2.4 \quad \{\text{Entwicklung der Erdbevölkerung ab 1950}\}$$

die Zeile

$$\text{Pop} = \text{if} (\text{Jahr} < 2000; \# \text{Pop} + \# \text{Pop} \cdot 0.0174; \# \text{Pop} + \# \text{Pop} \cdot 0.00852); \text{Pop}(1) = 2.4.$$

Verändert werden müssen analog die Modellgleichungen für die Variablen Area und CKult.

8.1.4 Ergebnisdiskussion

Aus der Sicht der Mathematikdidaktik erkennt man, daß ein formaler Kern der ganzen Ausarbeitung die Differenzengleichung 1. Ordnung ist. Alle Modellgleichungen sind von der Form $x_{n+1} = a \cdot x_n + b$, didaktisch vereinfacht oft geschrieben als $x_{neu} = a \cdot x_{alt} + b$ in der hier verwendeten Notation

$$x = a \cdot \#x + b.$$

Diese Gleichung wird in der Literatur auch als Tilgungsgleichung bezeichnet, wobei dann $a \cdot x_n$ als Kapital nach Verzinsung und b als Tilgungsrate interpretiert wird. x_{n+1} ist dann das Kapital für die nächste Tilgungsperiode.

Dieser Hinweis zeigt, daß das vorgestellte Thema sich mathematisch keineswegs im Neuland, sondern im Bereich von Wachstums- und Relaxationsprozessen abspielt, die im Rahmen der Potenzfunktionen sowohl im Gymnasium wie auch in der Realschule im Mathematiklehrplan zu finden sind.

Weitere formale Kerne sind die

- Anwendung von Iteration und
- Fallunterscheidung im Algorithmus und die
- Bewältigung einer großen Datenmenge durch graphische Aufarbeitung.

Ein Thema, also mehr als eine Textaufgabe, wird das dargestellte Stundenbild durch seinen Aktualitätsbezug. Seine allgemeinbildende Bedeutung ergibt sich daraus, daß das Argumentieren mit Szenarien im öffentlichen Raum seit den Veröffentlichungen des Club of Rome häufiger wird. Der Schüler sollte eine solche Argumentation verstehen und kritisieren können.

Dieses Thema hat schließlich noch einen handlungsvorbereitenden Kern:

Die Prognosen der Szenarien sind wichtige Argumente für das aktuelle Handeln unter dem Aspekt der intergenerationellen Verantwortung.

Was wir aus vielen Veröffentlichungen inzwischen wissen, ist natürlich auch in diesem einfachen Modell das Ergebnis. Wir haben uns nur auf das Kohlendioxid konzentriert. Wir wissen aber, daß sich die Methangaskonzentration seit 1765 von 0,8 auf 1,7 ppm verdoppelt hat und daß der Anteil der Fluorchlorkohlenwasserstoffe in den letzten 30 Jahren von praktisch 0 auf 0,001 ppm angewachsen ist (Philip D. Jones, Tom M. L. Wigley: Die Erwärmung der Erde seit 1850, Oktober 1990, Spektrum der Wissenschaft). Die Klimamodellrechnung prognostiziert auf Grund dieser Daten eine globale Erwärmung, die aber auf Grund der trägen thermischen Reaktion der Weltmeere erst allmählich sichtbar wird.

Die Trägheit der Natursysteme bewirkt, daß sich die insgesamt katastrophale Veränderung so langsam vollzieht, daß sie der Aufmerksamkeit der nicht naturwissenschaftlichen Beobachtung entzogen ist.

Gleichzeitig mit den Gefahren zeigen die Szenarien auch die Handlungsspielräume. Es gibt kein rasches Handeln mit der unmittelbaren Folge der Vereitelung der Katastrophe. Auch der richtig handelnde wird unweigerlich die Folgen der Fehlkonzeption unserer Technologie zu spüren bekommen. Und auch wenn unsere Kultur sich längst von den fossilen Kohlenstoffen in der heutigen Verwendungsform abgewendet haben wird, wird sie dennoch die Folgen zu tragen haben.

8.2 Temperaturverteilung in einem Wohnraum

Mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms soll die Temperaturverteilung im Inneren eines Raumes bei konstanten Temperaturen an Wänden, Türen und Fenstern berechnet werden.

Lehrplanbezug: Begriff der Funktion und ihre graphische Darstellung

Zeitbedarf: 2 Stunden

- Einführung in die Aufgabenstellung, Programmierung der Tabelle
- Diskussion der verschiedenen graphischen Darstellungen

Voraussetzungen

Mathematik: Begriff der Funktion mit einer unabhängigen Variablen, graphische Darstellungen. Erweiterung auf Funktionen in zwei unabhängigen Variablen, gegeben durch eine Wertetabelle und durch ein Verfahren zur näherungsweisen Berechnung der Funktionswerte.

Informatik: Grundlagen im Umgang mit einem Tabellenkalkulationsprogramm (Edieren von Zellen, Kopieren von Zellen, einfache mathematische Formeln, graphische Auswertung von Tabellen)

Literatur: G. Venz, Lösung von Differentialgleichungen mit dem programmierbaren Taschenrechner, München 1980

Raumplan

Es soll zunächst die Temperaturverteilung in einem Zimmer berechnet werden, das zwei Außenwände und eine Balkontür hat. Geheizt wird das Zimmer durch einen Heizkörper neben einer nur schlecht isolierenden Balkontür.

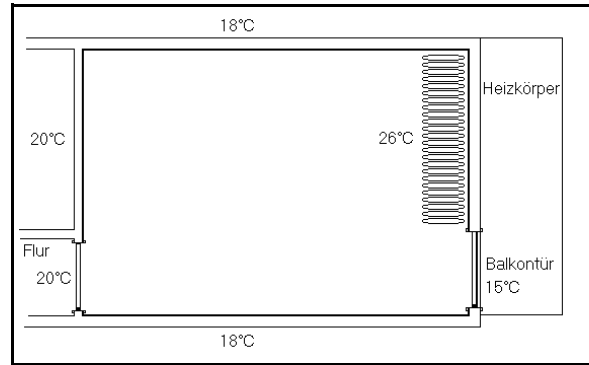


Bild 8.2.1

8.2.1 Berechnung der Temperaturverteilung im Raum

Hierzu wird der Raum in ein quadratisches Gitter eingeteilt. Die Temperaturen an den Rändern sind fest vorgegeben und nicht veränderbar. Die Temperaturen an jedem Punkt des Gitters im Rauminneren stellt sich nach genügend langer Wartezeit konstant ein. Es gilt dann der Gleichgewichtsfall und es stellt sich eine zeitunabhängige (stationäre) Temperaturverteilung ein. Die Temperatur an jedem Gitterpunkt kann durch Mittelung über die Temperaturen in der Umgebung berechnet werden. Dazu nimmt man die benachbarten Temperaturen.

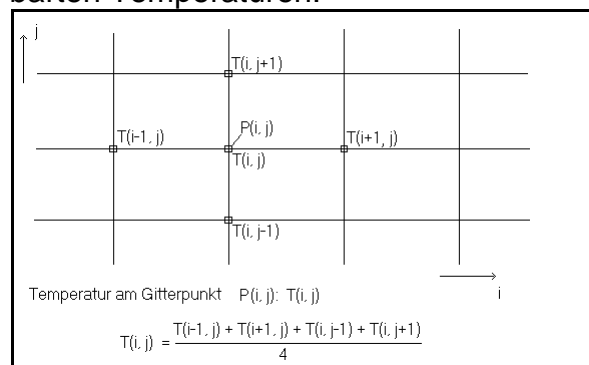


Bild 8.2.2

Es gilt für die Temperatur T am Punkt $P(i, j)$:

$$T(i, j) = [T(i-1, j) + T(i+1, j) + T(i, j-1) + T(i, j+1)] / 4$$

links rechts unten oben

Die Berechnung wird nun solange wiederholt, bis keine Veränderungen an den Einträgen mehr feststellbar sind. Programmierung in einem Tabellenkalkulationsprogramm

1) Festlegen der Gitterkoordinaten

S Z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
2	20									26
3	20									26
4	20									26
5	20									15
6	20									15
7	18	18	18	18	18	18	18	18	18	15

Bild 8.2.3

- 2) Eintragen der Randwerte
- 3) Eingabe der Formel in eine 'innere' Zelle und (relatives) Kopieren dieser Formel auf alle inneren Zellen
- 4) Die Tabelle solange berechnen lassen, bis die Zahlenwerte sich nicht mehr ändern. Dies braucht nicht programmiert werden, die Tastatursteuerung genügt.

Auswertungen

- 1) Graphische Auswertung einer Zeile oder Spalte und Diskussion des Zusammenhangs zur Funktion mit einer unabhängigen Variablen. Geeignet erscheinen Liniengraphen und Balkendiagramme.
- 2) Ausdrucken der Tabelle mit den eingetragenen Temperaturwerten. Einfärben von Zellen, in denen die Temperaturwerte in bestimmten Bereichen liegen, anhand einer festgelegten Farbskala ermöglicht die typische Auswertung von computergestützten Graphiken mit Farbcodierungen und läßt Gebiete gleicher Temperatur erkennen (Isotherme).
- 3) Schrägbilddarstellungen der Temperaturwerte über der (i, j) -Ebene.

Leistungsstarke Tabellenkalkulationsprogramme erlauben die Auftragung der Zelleneinträge eines Bereiches als Balken. Derartige 3D-Balkendiagramme können auch mit Programmen zur Präsentation von Tabellen erstellt werden (z. B. Harvard Graphics).

Will man diese Auftragung mit Hilfe eines einfachen Rechenblattes erreichen, so muß man eine Kopie der Tabelle zur Auftragung erstellen. Der Effekt der 3D-Darstellung wird durch Addition von Konstanten in i - und j -Richtung für jede Zeile erreicht. Jede Zeile wird dann als Punktgraph in einem Diagramm dargestellt. Da auf diese Weise keine verdeckten Linien berücksichtigt werden, ist es einfacher, die Punkte in einem Ausdruck von Schülern verbinden zu lassen.

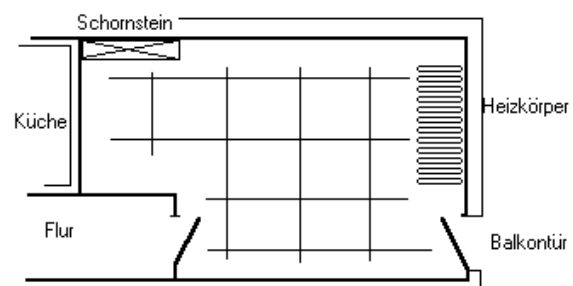


Bild 8.2.4

Weitere Aufgaben

- 1) Durch den Raum verläuft ein Schornstein, der das Zimmer zusätzlich aufheizt, die Form des Raumes weicht von der Rechtecksform ab.
- 2) Durch Vereinfachung der Randbedingungen kann versucht werden, geradlinige Isothermen zu erreichen.
- 3) Das Zimmer wird durch einen offenen Kamin im Zimmer aufgeheizt. Es zeigen sich kreisförmige Isotherme.
- 4) Das Augenmerk kann auch stärker auf die Entwicklung des Temperaturgleichgewichtes gelenkt werden. Die Ausbreitung der Wärme im Raum wird dadurch deutlich gemacht und

es können Analogien zur Ausbreitung von Schadstoffen von einer Schadstoffquelle mit gleichen Methoden erörtert werden. Der Hinweis auf den Einfluß der Methode der zeilen- bzw. spaltenweisen Berechnung erscheint hier sinnvoll und erzwingt die Diskussion von Testeingaben.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	**	**	**	**	**	**	**	**	**
3	**	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0
4	**	20,0	19,1	18,8	19,0	19,8	21,5	22,2	26,0
5	**	20,0	19,5	19,3	19,6	20,5	22,4	23,2	26,0
6	**	20,0	19,6	19,4	19,6	20,2	21,8	22,3	26,0
7	**	20,0	19,4	19,1	19,1	19,0	18,4	18,2	15,0
8	**	20,0	19,0	18,6	18,5	18,4	18,0	17,3	15,0
9	**	20,0	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	15,0
10	**	**	**	**	**	**	**	**	**

di =2.5

Bild 8.2.5

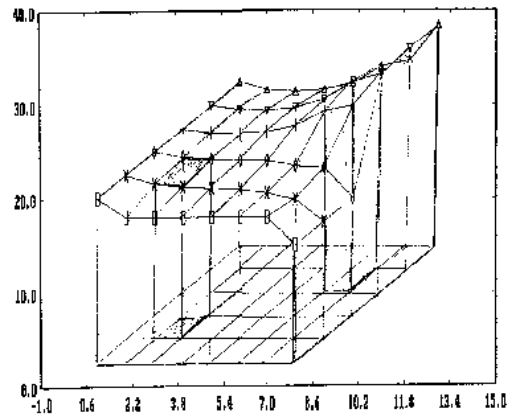


Bild 8.2.6

C4 $= (B4+C3+D4+C5)/4$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0				
2	20,0	19,0	18,7	18,6	18,7	18,9	19,3	20,1	21,8	26,0				
3	20,0	19,5	19,2	19,1	19,2	19,5	20,2	21,3	23,2	26,0				
4	20,0	19,7	19,4	19,4	19,5	19,9	20,6	21,7	23,6	26,0				
5	20,0	19,7	19,5	19,5	19,6	19,9	20,5	21,6	23,3	26,0				
6	20,0	19,7	19,5	19,4	19,4	19,6	20,0	20,7	22,1	26,0				
7	20,0	19,6	19,3	19,2	19,2	19,2	19,2	19,1	18,3	15,0				
8	20,0	19,4	19,1	18,9	18,8	18,7	18,6	18,1	17,1	15,0				
9	20,0	19,0	18,6	18,5	18,4	18,3	18,2	17,8	17,0	15,0				
10	20,0	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	15,0				
11														
12														
13														
14														
15														
16														
17														
18														
19														
20														
21														
22														

Bild 8.2.7

8.3 Wärmespeicher für die Nutzung von Sonnenenergie - Dynamische Simulation

8.3.1 Voraussetzungen

Physik: Energie- und Leistungsbegriff, Energieentnahme, Energieverlust, Wärme, Wärmekapazität

Mathematik: Sinusfunktion zur Beschreibung des Temperaturverlaufs

Aufstellen einer Energiebilanz

Literatur: K. Heinloth, Energie, Teubner Studienbücher, Stuttgart 83, Seite 304 ff.

Programm: Vivitab

8.3.2 Zielsetzung

Vereinfachte Modellrechnungen zeigen, daß bei einem extrem gut wärmeisolierten Haus mit einer Kollektorfläche von 30 m^2 und einem gut isolierten Wärmespeicher von 3000 m^3 im Prinzip der gesamte Jahresheizenergiebedarf gedeckt werden kann. Durch geeignete Systembeschreibung soll dies mit Hilfe einer dynamischen Simulation nachvollzogen werden.

8.3.3 Systembeschreibung

Modellhaus: Das Wohnhaus bestehe aus 100 m^2 Bodenfläche, 100 m^2 Wänden und 100 m^2 Dach.

Ein Abschätzung zeigt, daß der Wärmeverlust von doppelverglasten Fenstern dem des Mauerwerks entspricht. Die mittlere Raumtemperatur wird zunächst auf 18°C gesetzt.

Langzeitspeicherung von Wärme:

Speichergeometrie

- möglichst großes Verhältnis von Volumen/Oberfläche

Physikalische Bedingungen

- Speichern der Energie im Niedrigtemperaturbereich
- gute große Speichermasse bei hoher spez. Wärmekapazität

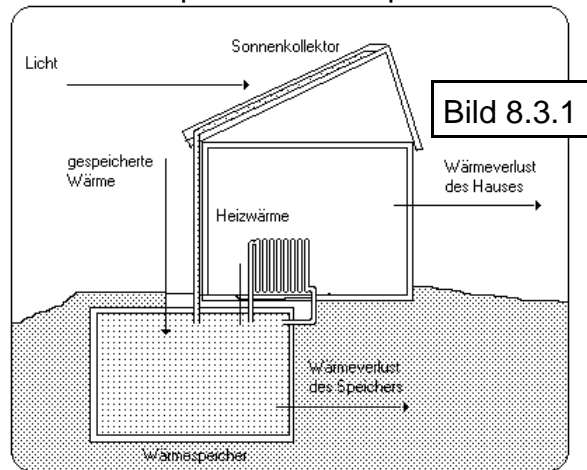


Bild 8.3.1

Der Wärmespeicher besteht aus einem wassergefüllten Tank. Die gespeicherte Wärme hängt somit von der Masse des Wassers, von der Wärmekapazität und der Wassertemperatur ab. Die Energie, die dem Wärmespeicher entnommen oder zugeführt wird, wird durch die Änderung der Temperatur beschrieben. Energie des Wärmespeichers wird gegeben durch die Speichermasse $m = 300\,000 \text{ kg}$ und der Wärmekapazität von Wasser $c_p = 0,0484 \text{ W Tag}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$. Der Wärmeverlust des Speichers wird mit $50 \text{ W}/^\circ\text{C}$ angesetzt.

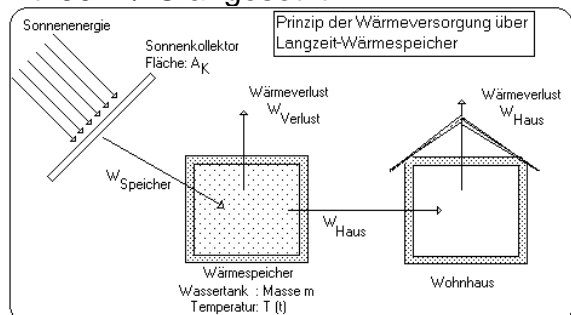


Bild 8.3.2

Energie des Sonnenkollektors aus der Kollektorfläche $A_K = 30 \text{ m}^2$ und seiner mittleren Leistung $d_q = 100 \text{ W}/\text{m}^2$.

Der Wärmeverlust des Hauses hängt von der Isolierung des Wände, des Daches und des Bodens ab. Diese Verlustleistung beträgt ungefähr $350 \text{ W/}^\circ\text{C}$.

Energieänderung des Speichers pro Tag:

$$c_p m dT = dW_s - dW_v - dW_h$$

Die gespeicherte Wärme pro Tag teilt sich auf in den Anteil, der die gesamte gespeicherte Energie des Tanks erhöht, vermindert um die Energie dW_v , die durch mangelnde Isolierung verloren geht und die Energie dW_h , die zum Beheizen des Hauses entnommen wird. Sowohl der Wärmeverlust des Speichers als auch die für die Heizung entnommene Wärme hängen von der Umgebungstemperatur ab. Die Wärme, die auf diese Weise dem Speicher pro $^\circ\text{C}$ Temperaturunterschied entnommen wird, wird mit $50 \text{ W/}^\circ\text{C}$ angesetzt. Die gesamte Energieverlust ist dann durch den Term $50 \text{ W/}^\circ\text{C} (T_s - T_o)$ gegeben. T_o ist die jahreszeitlich schwankende Lufttemperatur der Umgebung.

Entsprechend gilt für das Beheizen des Hauses, wenn man eine gewünschte Raumtemperatur von 18°C annimmt:

$$200 \text{ W/}^\circ\text{C} (T_h - T_o).$$

Die Umgebungstemperatur kann im einfachsten Fall durch eine Sinusfunktion mit der Scheitelhöhe als Jahrestemperaturschwankung um den Jahresmittelwert formuliert werden:

$$T_o(t) = T_{\text{mittel}} + T_{\text{schwankung}} \sin(2\pi/360 d * t)$$

mit $T_{\text{schwankung}} = 12^\circ\text{C}$ und $T_{\text{mittel}} = 13^\circ\text{C}$

Die Energiebilanz pro Tag lautet nun:

$$0,0484 \text{ W d/kg } ^\circ\text{C} 300\,000 \text{ kg } dT(t) = 100 \text{ W/m}^2 * 30 \text{ m}^2 - 50 \text{ W/}^\circ\text{C} (T_s - T_o) - 350 \text{ W/}^\circ\text{C} (T_h - T_o).$$

Uns interessiert der zeitliche Temperaturverlauf, deshalb lösen wir die Gleichung nach der Temperatur $dT(t)$ auf:

$$dT(t) = [(3000 \text{ W} - 50 \text{ W/}^\circ\text{C} (T_s - T_o) - 350 \text{ W/}^\circ\text{C} (T_h - T_o)] / (0,0484 \cdot 300\,000 \text{ d}) ^\circ\text{C}$$

Will man die gesammelte Energie wissen und daraus dann die Temperatur bestimmen, muß man diesen Änderungswert zum aktuellen Wert addieren. Man berechnet nun in Schritten von einem Tag den Wert dT und addiert diesen zur gerade erreichten Temperatur des Speichers. Gilt $dT > 0$, so wird sich die Temperatur im Speicher erhöhen, sonst wird dem Speicher Energie entzogen, also kühlt er sich ab.

Modellgleichungen

```

n = 360
  Zahl der Berechnungsschritte ist
  gleich der Anzahl der Tage
t = #t + 1; t(1) = 0
  Zeitangabe in Tagen
T0 = 12 sin(0.018 t) + Tm
  Jahrestemperaturverlauf,
  Jahresmittelwert Tm = 13°C
Wv = 50 (T T0)
  Wärmeverlust des Speichers
Wh = 350 (Th - T0)
  Wärmeentnahme zur
  Beheizung des Hauses
T = #T + (3000 - Wv - Wh) dt /
(cp m); T(1) = 10
  Bilanzgleichung mit
  einem Startwert von 10°C
Konstanten
cp = 0.484
  Wärmekapazität von Wasser
  pro Tag und pro °C
m = 300000
  Wassermasse in kg
dt = 1
  Zeitschritt 1 Tag (1d)
Tm = 13
  Jahresmittel in °C
Th = 18
  Raumtemperatur in °C

```

Modell-Editor

```

n = 666
t = #t+dt; t(1)=0
T0 = 12*sin(0.018*t)+Tm
Wv = 50*(#T-T0)
Wh = if(T0<18, 350*(Th-T0), 0)
T = #T+(3000-Wv-Wh)*dt/(cp*m); T(1)=T0
    
```

Tabellenkonstanten, z.B. $t0=ln(2)$ (Konstantenname max. 6 Zeichen)
 $cp = 0.0404$ $m = 300000$ $dt = 1$ $Tm = 13$
 $Th = 18$

Zeile ausschneiden ein aus Hilfe Abbrechen
 Zeile einfügen

Bild 8.3.3

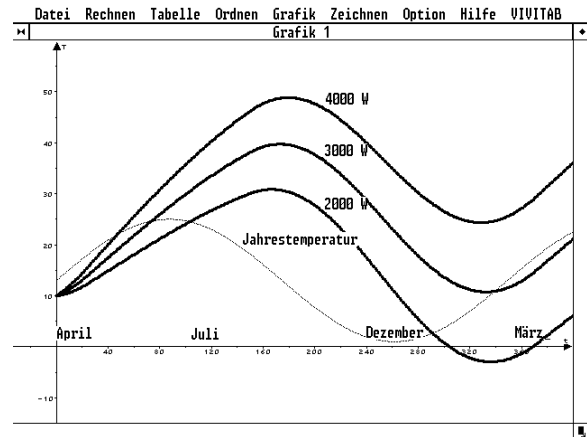


Bild 8.3.7

Datei Rechnen Tabelle Ordnen Grafik Zeichnen Option Hilfe VIVITAB

S: Bogenmaß
 V1: $cp = 0.0404$; $m = 300000$; $dt = 1$; $Tm = 13$
 V2: Wert: 1750

n	t	T0	Wv	Wh	T
1	0	13	1750	10	10
2	1	13.216	-160.7	1674.4	10.102
3	2	13.431	-166.4	1598.0	10.210
4	3	13.647	-171.8	1523.3	10.323
5	4	13.863	-176.9	1447.8	10.443
6	5	14.078	-181.7	1372.5	10.567
7	6	14.293	-186.2	1297.2	10.697
8	7	14.508	-190.5	1222.1	10.833
9	8	14.722	-194.4	1147.2	10.974
10	9	14.935	-198.0	1072.5	11.120
11	10	15.148	-201.3	998.0	11.272
12	11	15.360	-204.4	923.8	11.429
13	12	15.571	-207.1	849.8	11.591
14	13	15.782	-209.5	776.1	11.759
15	14	15.992	-211.6	702.7	11.932
16	15	16.200	-213.4	629.7	12.110

Bild 8.3.4

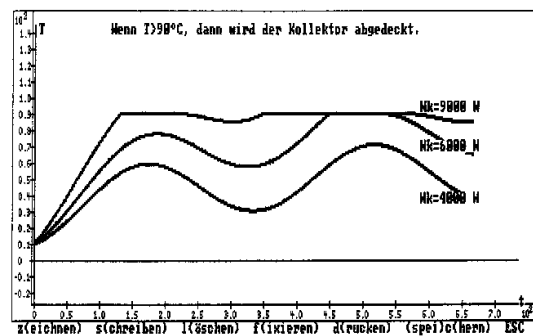


Bild 8.3.8

Modell-Editor

```

n = 666
t = #t+dt; t(1)=0
T0 = 12*sin(0.018*t)+Tm
Wv = 50*(#T-T0)
Wh = if(T0<18, 350*(Th-T0), 0)
T = #T+(3000-Wv-Wh)*dt/(cp*m); T(1)=T0
W = Wv+Wh
    
```

Bild 8.3.5

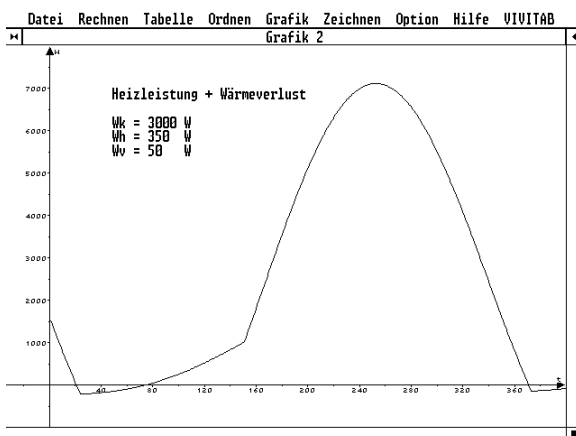


Bild 8.3.6

8.4 Verkehrsfluß und Geschwindigkeit im Straßenverkehr

8.4.1 Ziel

Es soll gezeigt werden, daß die Zahl der Fahrzeuge, die auf einer Straße in einer bestimmten Zeit an einem vorbeifahren können, durch Verringerung der Geschwindigkeit gesteigert werden kann (Modell des absolut sicheren Abstandes).

8.4.2 physikalische und technische Begriffe

Faustregel: Es zeigt sich, daß ein zeitlicher Anstand der Fahrzeuge im Straßenverkehr von ungefähr 2 Sekunden sinnvoll ist. Diese Zeitmarke kann man leicht selbst kontrollieren, in dem man den Abstand durch Zählen der Sekunden (langsames Zählen '21, 22, ...') an markanten Straßenbauwerken, z. B. Brücken, feststellt. Nach §4 der Straßenverkehrsordnung muß der Mindestabstand vom vorausfahrenden Fahrzeug so groß sein, daß man noch hinter ihm sicher halten kann, wenn es plötzlich bremst. Die Rechtsprechung geht aber davon aus, daß mit einem plötzlich stehenden Hindernis im allgemeinen nicht zu rechnen ist. Also kann man in den eigenen Halteweg den Mindestabstand des Vordermanns einbeziehen.

Halteweg: Eine gute Regel besagt, daß der Halteweg h ist die Differenz aus den Mindestabständen von zwei Fahrzeugen und dem mittleren Platzbedarf von 2 Fahrzeugen:

$$h = 2s_{\min} - 2 \cdot 7m \Rightarrow s_{\min} = \frac{h}{2} + 7m$$

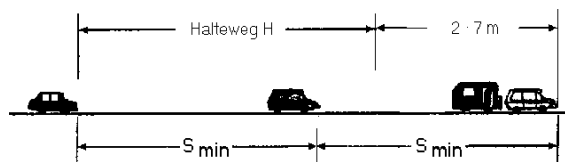


Bild 8.4.1

Bremsverzögerung: Der Halteweg wird weiter stark von der Qualität der Bremsen beeinflusst. Als Maß gilt die Zahl, die angibt welche Geschwindigkeitsänderung in einer 1 Sekunde erreicht wird. Gesetzlich vorgeschrieben ist eine Geschwindigkeitsabnahme von mindestens 2,5 m/s in 1 Sekunde; üblich ist eine Bremsverzögerung a von ca. 5 m/s pro 1 Sekunde. Aus den Gleichungen für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung folgt für den Bremsweg S :

$$S = \frac{v^2}{2a}$$

Also mit $a = 5 \text{ m/s}^2$ folgt $S = \frac{v^2}{2 \cdot 5 \text{ m/s}^2}$.

Reaktionsweg: Zwischen dem Auftreten eines Hindernisses und dem Betätigen der Bremse vergeht eine vom Fahrer abhängige Zeit t_s , die sog. Schrecksekunde. Der Weg, den das Fahrzeug mit der Geschwindigkeit v in dieser Zeit zurücklegt, muß zum eigentlichen Bremsweg addiert werden.

Mindestabstand ist somit:

$$\begin{aligned} s_{\min} &= \frac{h}{2} + 7m \\ &= \frac{S + v \cdot t_s}{2} + 7m \\ &= \frac{\frac{v^2}{2a} + v \cdot t_s}{2} + 7m. \end{aligned}$$

Zeitlücke t^* , die man zum Durchfahren dieses Mindestabstandes braucht ist also:

$$t^* = \frac{s_{\min}}{v}$$

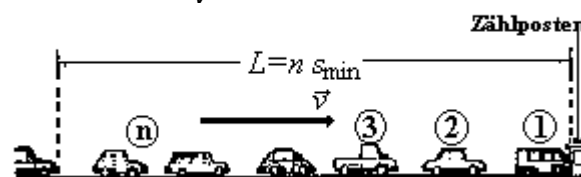


Bild 8.4.2

Eine Betrachtung des Graphen der Funktion $t^* = t^*(v)$ zeigt ein flaches Minimum, das etwas unterhalb des empfohlenen 2-Sekunden-Wegabstandes bei einer Geschwindigkeit ungefähr 30 km/h (ungefähr 9 m/s) liegt. Bei niedrigen, aber vor allem bei höheren Geschwindigkeiten wird dieser 2-Sekunden-Wegabstand deutlich überschritten.

Verkehrstrom: Wieviele Fahrzeuge können in einer bestimmten Zeit an einem Beobachtungspunkt am Straßenrand passieren?

Bei einer Zeitlücke t^* von 2 Sekunden sind das also 1800 Fahrzeuge. Der Verkehrstrom

$$J = \frac{1800 \text{ Fahrzeuge}}{1 \text{ h}}$$

Allgemein $J = \frac{1}{t^*} = \frac{v}{s_{\min}}$.

Kolonnenlänge: Fahren n Fahrzeuge in einer Kolonne, so hat diese die Länge $L = n \cdot s_{\min}$. Die Kolonne fährt mit der Geschwindigkeit v in der Zeit $t = L/v$ an einem Zählposten vorbei. Dieser registriert den Verkehrstrom

$$J = \frac{n}{t} = \frac{L}{s_{\min} \cdot \frac{L}{v}} = \frac{v}{s_{\min}} = \frac{1}{t^*}$$

In einer Tabelle kann man nun t^* aus der Bremsverzögerung a in Abhängigkeit von v berechnen und erhält damit eine Tabelle für den Verkehrstrom J in Abhängigkeit von v : $J = J(v)$.

8.4.3 Aufgaben

Modellierung in Vivitab:

The screenshot shows the Vivitab interface with the following model equations and constants:

```

n = 300
v = 300
t = v + 0.1; v(1) = 0
a = 0.5 * v^2 / a
H = s + v * 1
s_min = H / 2 + 7
t = s_min / v
I = 1 / t
    
```

Tabellenkonstante (maximal 8):
a = 5

Buttons: F2, TbLt, TbRt, Pg, Zeichenautomatik, Modellgleichungen eingeben, ESC ? Rechner, Wiedh, Lö, Speich, Const, Mo

Bild 8.4.3

The screenshot shows a table of data and a graph. The table has columns for v, I, H, s_min, and t. The graph plots t* (s) on the y-axis against v (km/h) on the x-axis, showing a curve that starts high at low speeds and levels off at higher speeds.

Bild 8.4.4

Die Graphen für folgende Parameter sollen in geeigneter Fragestellung untersucht werden:

- Bestimmung des größten Verkehrstromes; Geschwindigkeitsbegrenzung an Autobahnbaustellen
- Einfluß der Bremsverzögerung; Fahrzeuge mit ABS
- Einfluß der Länge der Schrecksekunde; Einfluß von Arzneimitteln
- Einfluß des mittleren Platzbedarfs eines Fahrzeugs ($\neq 7\text{m}$); LKW-Fahrverbot
- Diskussion der Staugefahr bei niedrigen Geschwindigkeiten; „stop-and-go“-Verkehr
- Bedeutung der Richtgeschwindigkeit von 130 km/h

8.5 Stufenweise Modellierung eines dynamischen Systems

8.5.1 Mathematisches Modell eines dynamischen Systems

Beim Verfahren der Systemdynamik wird ein dynamisches System in seiner zeitlichen Veränderung modelliert. Das zu modellierende System besteht i. a. aus mehreren Zustandsgrößen A, B, C, \dots , die zahlenmäßig erfaßbare Werte annehmen. Diese Zustandsgrößen ändern sich in Abhängigkeit von der Zeit („dynamisch“) und hängen zudem gegenseitig voneinander („System“) bzw. von Konstanten ab.

$$\begin{aligned} A: & A(t) = f_A(B, C, \dots, t) \\ B: & B(t) = f_B(A, C, \dots, k, \dots, t) \\ C: & C(t) = f_C(A, B, \dots, k, \dots, t) \\ & \vdots \end{aligned}$$

Diese Zustandsgrößen lassen sich in ihrem wechselseitigen Wirkungsgeflecht auch graphisch darstellen:

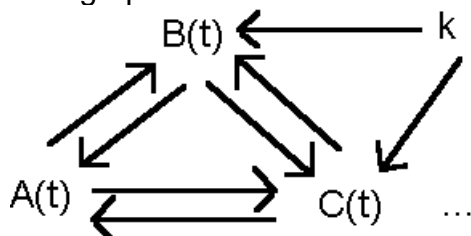


Bild 8.5.1

Der zeitliche Ablauf dieser Zustandsgrößen A, B, C, \dots z. B. in Form ihrer Funktionsgleichungen

$f_A(B, C, \dots, t), f_B(A, C, \dots, k, \dots, t), f_C(A, B, \dots, k, \dots, t), \dots$ ist nicht bekannt und soll durch das Modell erst ermittelt bzw. approximiert werden.

Dazu muß man lediglich wissen, wie sich der Wert einer Größe zu einem jetzigen Zeitpunkt t aus dem Wert der Größe zu einem vorhergehenden Zeitpunkt $t - \Delta t$

berechnen läßt. Nach dieser Änderung oder Differenz ΔA der Größe A während des Zeitintervalls Δt nennt man solche Gleichungen Differenzgleichungen:

$$\begin{aligned} \Delta A &= A(t) - A(t - \Delta t) \\ \text{bzw. } A(t) &= A(t - \Delta t) + \Delta A \end{aligned}$$

Die Änderung ΔA kann vom vorigen Wert $A(t - \Delta t)$ sowie auch von den weiteren Systemgrößen B, C, \dots und Konstanten abhängen:

$$\Delta A = f \Delta A(A(t - \Delta t), B(t - \Delta t), C(t - \Delta t), \dots, k, \dots)$$

Dies gilt entsprechend für die weiteren Systemgrößen B, C, \dots und ihren Änderungen $\Delta B, \Delta C, \dots$ (Liesse man die Zeitschritte Δt gegen Null gehen, so würde aus der Differenz ΔA das Differential dA , aus dem Quotienten $\Delta A / \Delta t$ die Ableitung dA/dt der Größe A , aus der Differenzgleichung würde eine Differentialgleichung). Die Gleichungen für die Änderungen oder Differenzen $\Delta A, \Delta B, \Delta C, \dots$ können i. a. von sehr einfacher Struktur - meist lineare Gleichungen - sein. Basis der Modellierung ist also ein Differenzgleichungssystem.

$$\begin{aligned} A(t) &= A(t - \Delta t) + \Delta A \\ B(t) &= B(t - \Delta t) + \Delta B \\ C(t) &= C(t - \Delta t) + \Delta C \\ & \vdots \end{aligned}$$

mit den weiteren Gleichungen für $\Delta A, \Delta B, \Delta C, \dots$

Die Ergebnisse bzw. Lösungen dieses Differenzgleichungssystems werden durch geeignete numerische Näherungsverfahren ermittelt. Alle diese Verfahren gehen nach einem ähnlichen iterativen Prinzip vor: ausgehend von den Anfangswerten für A_0, B_0, C_0, \dots zum Zeitpunkt t_0 des Starts der Simulation werden durch Einsetzen in die Differenzgleichungen des Systems alle ihre Werte A_1, B_1, C_1, \dots für den nächsten Zeitpunkt $t_1 = t_0 + \Delta t$ berechnet, aus diesen

wiederum die für den folgenden Schritt usw. Dabei kann das Verfahren zur Berechnung von $A(t)$ aus $A(t-\Delta t)$ in erster Näherung sehr einfach sein. Dadurch werden in vielen Fällen ausreichende qualitative Ergebnisse erzielt. Für eine Verfeinerung liegen verschiedene numerische Verfahren vor, welche die zahlenmäßigen Ergebnisse verbessern können.

8.5.2 Verfahren der Modellierung

Nach dem Verfahren der Systemdynamik wird die rechnergestützte Modellierung zweckmäßigerweise in einzelnen Schritten durchgeführt. Zuerst werden die im betrachteten Bereich relevanten Größen definiert und in einer schlichten **Liste** (Bild 8.5.2) gesammelt. Sodann wird ein rein qualitatives Netz ihrer Abhängigkeiten in Form eines **Kausaldiagramms** gezeichnet (Bild 8.5.3). Die kausalen Zusammenhänge werden in Wirkungspfeilen symbolisiert. Die Verfeinerung dieses Netzes zu einem **Flußdiagramm** (Bild 8.5.4), bei dem Zustandsgrößen, Raten und Konstante mit unterschiedlichen Symbolen dargestellt werden, erleichtert die folgende algebraische Formulierung der einzelnen Abhängigkeiten in Form von **Differenzgleichungen** (Bild 8.5.5). Der Rechner ermittelt daraus und aus den Anfangswerten für die Größen (Bild 8.5.6) das Verhalten aller übrigen Zustandsgrößen, d. h. das Verhalten des gesamten Systems. Dies wird als **Tabelle** (Bild 8.5.7) der Zahlenwerte oder in Form von **Funktionsgraphen** (Bild 8.5.8) dargestellt.

Liste:

Gesamtpopulation
 Kranke
 Gesunde
 Krankheitsdauer
 Infektionen
 Infektionsrate
 Geheilte
 Immune

Bild 8.5.2

Kausaldiagramm:

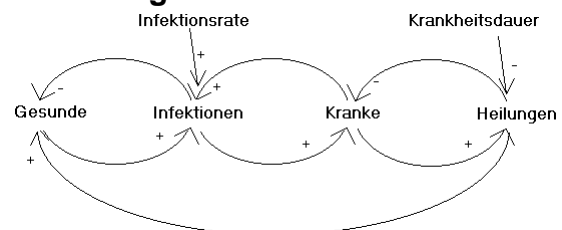


Bild 8.5.3

Flußdiagramm:

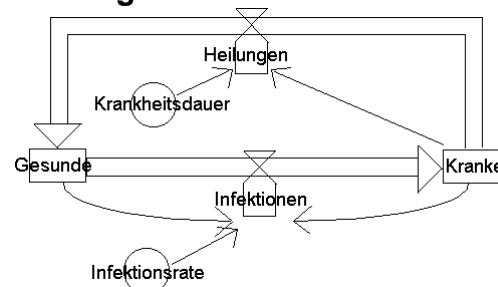


Bild 8.5.4

Modellgleichungen:

$Kranke_t := Kranke_{t-1} + Infektionen_{t-1} - Geheilte_{t-1}$
 $Gesunde_t := Gesunde_{t-1} - Infektionen_{t-1} + Geheilte_{t-1}$
 $Infektionen_t = Kranke_{t-1} * Gesunde_{t-1} * Infektionsrate / Gesamtpopulation$
 $Geheilte_t := Kranke_{t-1} / Krankheitsdauer$

Bild 8.5.5

Startwerte:

Personen	1000
Infektionsrate	0,3
Krankheitsdauer	4

Bild 8.5.6

Tabelle:

Tage:	Ge-sunde:	Infek-tionen:	Kranke:	Hei-lungen:	Ge-heilte:
0	1.000	1	1	0	0
1	999	1	2	0	0
2	998	1	3	0	1
3	997	2	4	0	1
4	995	3	7	1	2
5	992	5	12	1	3
6	986	9	20	2	5
7	977	15	32	3	8
8	963	23	53	5	13
9	939	37	84	8	22
10	902	57	133	13	35
11	845	84	204	20	56
12	761	117	300	30	86

Bild 8.5.7

Graph:

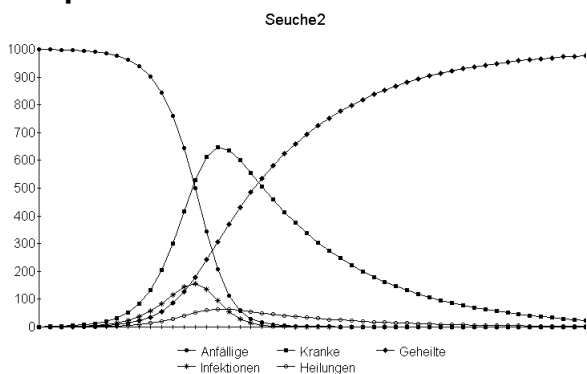


Bild 8.5.8

Durch systematisches Variieren der Eingangsparameter (Startwerte, Konstante) ergeben sich Klassen von Ergebnissen, die Auskunft über die dynamische Struktur des Systems geben. Die Ergebnisse werden mit der beobachteten Realität bzw. der erwarteten Prognose verglichen. Abweichungen werden diskutiert und können Anlaß geben zur Korrektur

von Eingabeparametern, evtl. auch zu Änderungen an der Modellstruktur. Dieses interaktive „Spielen“ mit dem Modell kann zu einem tieferen Begreifen des modellierten Bereichs führen.

8.5.3 Weg zu klassischen Funktionen

Nur ein Teil der Differenzgleichungssysteme bzw. der entsprechenden Differentialgleichungssysteme besitzen Lösungen, die sich als analytische Funktion formulieren lassen. Der größere Teil dynamischer Systeme besitzt keine solche geschlossene Lösung, dennoch läßt sich ihr zeitlicher Verlauf mit dem beschriebenen Verfahren approximieren.

Im folgenden sollen die fünf Klassen von Systemen betrachtet werden, von denen vier in ihrem zeitlichen Verlauf den in Sek. I behandelten Funktionstypen entsprechen: **lineare Funktion** (Gerade), **Potenzfunktion** (Parabel), **Exponentialfunktion**, **Winkelfunktion** (Kosinus). Dabei wird gezeigt, daß jedem dieser Funktionstypen eine bestimmte (graphisch als Kausal- oder Flußdiagramm darstellbare) Modellstruktur eindeutig zugeordnet ist. Der topologischen Struktur eines dynamischen Systems entspricht jeweils ein charakteristischer zeitlicher Ablauf in Form einer dieser Funktionen. Dabei wird von einem konkreten Beispiel ausgegangen, wie es sich in der Realität in vielen Fällen beobachten läßt.

Das rechnerische Verfahren zur Lösung des Differenzgleichungssystems geht schrittweise vor. Die Änderungen aller Größen zum jetzigen Zeitpunkt gegenüber dem vorigen Zeitpunkt werden aus den Größen zum vorhergehenden Zeitpunkt berechnet und zu diesen hinzuaddiert. Dieses Verfahren wird für alle Zeitschritte im untersuchten Zeitintervall wiederholt. So werden die

Änderungen in den Zustandsgrößen akkumuliert. Daraus ergibt sich eine Folge von Zahlen(tupeln), die dem Verlauf der funktionalen Abhängigkeit der Systemgrößen von der Zeit näherungsweise entspricht.

Die für das Verständnis des Verfahrens vorauszusetzenden mathematischen Kenntnisse sind gering und i. a. in Sek. I vorhanden: Umgang mit linearen Gleichungen bzw. linearen Gleichungssystemen, bei denen der in einer Gleichung ermittelte Wert einer Variablen in die folgende Gleichung eingesetzt wird. Da alle dynamischen Prozesse zeitabhängig sind, ist die unabhängige Variable üblicherweise die Zeit t bzw. die Rechtswertachse im Diagramm die Zeitachse. Um mehr Übereinstimmung mit den gewohnten Variablenbezeichnungen zu erreichen, wird im folgenden als unabhängige Variable x gewählt. Die Systemgröße A wird zur abhängigen Variablen y .

Die Differenzen $y_n - y_{n-1} = \Delta y_{n-1}$ zwischen dem neuen und dem alten y -Wert lassen sich durch Division durch die Intervalllänge Δx normieren auf den Differenzenquotienten $\Delta y_n / \Delta x$. Dieser Differenzenquotient wird hier in erster Näherung durch die Ableitung oder Rate y' ersetzt. Die Differenzen $\Delta y = y'_i \cdot \Delta x$ werden in y akkumuliert. Der n -te Wert von y ergibt sich folglich als Summe von Anfangswert y_0 plus alle folgenden Änderungen mal Schrittweite ($y'_i \cdot \Delta x$):

$$y_n = y_0 + \sum_{i=1}^n y'_i \cdot \Delta x$$

Diese Akkumulation kann als propädeutischer Einstieg in das Prinzip der Integration gelten; die akkumulierte Größe y bildet einen Näherungswert für das bestimmte Integral über der Differenz y' im berechneten Intervall von x . Die Näherung wird um so genauer, je kleiner die Schrittweite Δx wird. Die

Schreibweise des bestimmten Integrals würde lauten:

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x_n} y'_i \cdot dx$$

8.5.4 Realisierung mit Tabellenkalkulationsprogramm

Als Werkzeug zur rechnergestützten Modellierung eignen sich allgemeine Programmiersprachen, spezielle Simulationstools oder auch Tabellenkalkulationsprogramme aus der Standardsoftware. In den folgenden Beispielen wird das Tabellenkalkulationsprogramm aus dem integrierten Standardsoftwarepaket MS-Works eingesetzt. Es eignet sich wegen seiner standardisierten Oberfläche und seines integrierten Graphikteils gut und erfreut sich gegenwärtig relativ weiter Verbreitung. Eine analoge Übertragung auf vergleichbare Kalkulationsprogramme ist leicht möglich. (Aus typographischen Gründen bei der Tabellenkalkulation muß im folgenden leider auf eine Unterscheidung zwischen Δx und dx bzw. Δy und dy verzichtet werden.)

In den Rechenblättern werden die (Zeit-)Variable x und die zeitabhängigen Zustandsgrößen y (y' , y'' , ...) in Spalten errechnet und in einem Diagramm als Punktfolge dargestellt. In einer Zeile stehen dann jeweils die Werte für x und alle weiteren Größen zu diesem Zeitpunkt.

Zum Vergleich werden die entsprechenden Werte für die Funktion $f(x)$ direkt aus der vorgegebenen analytischen Gleichung ermittelt und in einer weiteren Spalte in die Zeilen der jeweiligen x -Werte geschrieben. Ihr Graph wird als Linie gezeichnet.

Durch ein Variieren der Parameter des dynamischen Systems einerseits bzw.

der analytischen Gleichung andererseits können die y -Werte zur Übereinstimmung bzw. die Graphen zur Deckung gebracht werden. Für diesen Fall ist dann gezeigt:

- die Werte der Spalte y gehorchen auch der Gleichung für $f(x)$,
- $f(x)$ ist somit im betrachteten x -Intervall eine (angenäherte) Lösung des Differenzen- bzw. Differentialgleichungssystems,
- für die gewählten Anfangswerte und Parameter des Differenzgleichungssystems ergeben sich die entsprechenden Parameter der Lösung $f(x)$.

Diese Aussagen sind dann zwar nicht im strengen Sinne bewiesen, doch erhalten sie durch eine große Anzahl von Stichproben eine gewisse Plausibilität. Theoretisch könnte durch beliebig kleine Wahl der Schrittweite dx die Funktion $f(x)$ beliebig genau approximiert werden, wobei sich die Zahl der Iterationen entsprechend erhöhen würde; in der Praxis am Rechner ist aber aus Gründen der Rechenzeit und des Speicherplatzes nur eine überschaubare Zahl von Schritten möglich. Auch erhöht sich bei großer Schrittzahl der Gesamtfehler durch Akkumulation der endlich großen Rechenfehler des Computers bei jedem

Schritt erheblich. Eine numerische Verbesserung der Ergebnisse könnte auch durch geänderte Approximationsverfahren erzielt werden: verbessertes Euler-, Runge-Kutta-, Prädiktor-Korrektor-, Adam-Bashforth-Verfahren u. a. Diese Standardthemen der numerischen Mathematik sollen hier zugunsten einer einfachen Überschaubarkeit für Schüler der Sek. I außer Betracht bleiben.

Zum ersten Einstieg kann die Schrittweite sogar $dx = 1$ gewählt werden. Dadurch vereinfachen sich die Differenzgleichungen;

$$\begin{array}{l} \text{z. B. statt} \quad y_n = y_{n-1} + y'_n \cdot dx \\ \text{nur} \quad \quad \quad y_n = y_{n-1} + y'_n \end{array}$$

Dann können die y -Werte auch als Zahlenfolge betrachtet werden:

Anfangswert der Folge

$$(a_0) \quad y_0$$

Bildungsgesetz

$$(a_{n-1} \rightarrow a_n) \quad y_n = y_{n-1} + y'_n$$

Im Falle der Geraden ist y' konstant; daraus folgt $y_n = y_{n-1} + y'_n$, bzw.

$$y_n = y_0 + \sum_{i=1}^n y'_i \quad \text{und} \quad y_n = y_0 + n \cdot y'$$

sich mit $x := n$, $m := y'$ und $t := y_0$ die Geradengleichung $y = m \cdot x + t$ direkt ergibt.

8.5.5 Lineare Funktion (Gerade)

Anwendungsbeispiel

In einen z. B. mit Wasser gefüllten Behälter mit dem Pegelstand y [l] fließe pro Zeiteinheit [min] ein konstanter Zufluß y' [$l \cdot \text{min}^{-1}$] zu.

Zeit

Zeit x [z. B. min]
 (da diese Gleichung für alle Modelle in gleicher Weise gilt, wird sie bei den folgenden Modellen nicht mehr angegeben).

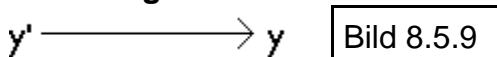
Zustandsgröße

Pegel y [z. B. l]

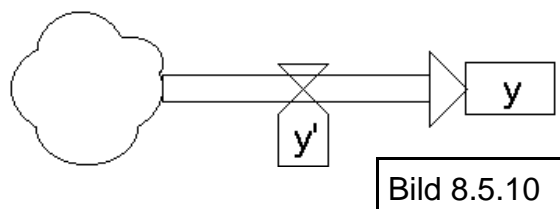
Rate

Zufluß y' [z. B. $l \cdot \text{min}^{-1}$]

Kausaldiagramm



Flußdiagramm



Modellgleichungen

Zeit $x_n = x_{n-1} + dx$ [min]
 Pegelstand $y_n = y_{n-1} + y' \cdot dx$ [l]

Der Zeitpunkt x_n errechnet sich aus dem vorigen Zeitpunkt x_{n-1} durch Addition des Zeitschritts dx . Der neue Wert y_n für den Pegelstand ergibt sich aus dem alten y_{n-1} durch Addition der Differenz $y' \cdot dx$. Systemdynamische Formulierung: In der Zustandsgröße y wird pro Zeiteinheit die konstante Rate y' akkumuliert.

Eingabeparameter der Modellgleichungen

Anfangswert für x :	x_0	[min]
Schrittweite für x :	dx	[min]
Rate:	y'	[$l \cdot \text{min}^{-1}$]
Anfangswert für y :	y_0	[l]

Im Rechenblatt werden Felder für die Eingabeparameter angelegt und Spalten für die Modellvariablen x und y . Für bestimmte Parameter ergeben sich im Rechenblatt verschiedene Wertetabellen für x und y , die im Diagramm jeweils als Punkte dargestellt werden.

Beispiel für die Wahl der Parameter

x_0	0	[min]
dx	0,1	[min]
y'	0,8	[$l \cdot \text{min}^{-1}$]
y_0	1	[l]

Rechenblatt mit Formeln

x_0 :	0
dx :	0,1
y_0 :	1
y' :	0,8
x	y
= x_0	1
= $Z(-1)S + dx$	= $Z(-1)S + y' * dx$
= $Z(-1)S + dx$	= $Z(-1)S + y' * dx$
= $Z(-1)S + dx$	= $Z(-1)S + y' * dx$
:	:

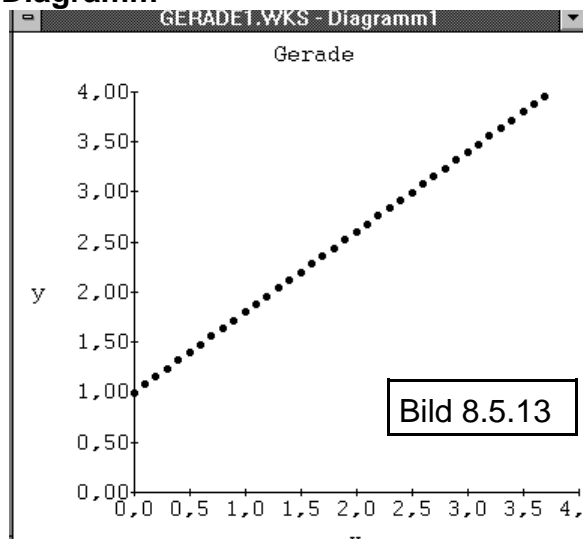
Bild 8.5.11

Rechenblatt mit Zahlenwerten

GERADE1.WKS			
	A	B	C
1	x_0 :	0,0	
2	dx :	0,1	
3	y_0 :	1	
4	y' :	0,8	
5			
6	x	$y' * dx$	y
7	0,0		1,00
8	0,1	0,08	1,08
9	0,2	0,08	1,16
10	0,3	0,08	1,24
11	0,4	0,08	1,32
12	0,5	0,08	1,40
13	0,6	0,08	1,48
14	0,7	0,08	1,56
15	0,8	0,08	1,64
16	0,9	0,08	1,72
17	1,0	0,08	1,80
18	1,1	0,08	1,88
19	1,2	0,08	1,96
20	1,3	0,08	2,04

Bild 8.5.12

Diagramm



Rechenblatt mit Zahlenwerten

GERADE1.WKS				
A	B	C	D	E
x0:	0,0		m:	0,9
dx:	0,1		t:	1,0
y0:	1			
y':	0,8			
x	y' * dx	y		f(x)
0,0		1,00		1,00
0,1	0,08	1,08		1,09
0,2	0,08	1,16		1,18
0,3	0,08	1,24		1,27
0,4	0,08	1,32		1,36
0,5	0,08	1,40		1,45
0,6	0,08	1,48		1,54
0,7	0,08	1,56		1,63
0,8	0,08	1,64		1,72
0,9	0,08	1,72		1,81
1,0	0,08	1,80		1,90
1,1	0,08	1,88		1,99
1,2	0,08	1,96		2,08
1,3	0,08	2,04		2,17

Bild 8.5.15

Die Punkte liegen offensichtlich auf einer Geraden. Um dies zu erhärten, wird das Rechenblatt um eine Spalte erweitert, in welcher zu den jeweiligen x-Werten die Werte f(x) nach der Geradengleichung berechnet werden.

Funktionsgleichung

$$f(x): y = m x + t$$

Eingabeparameter der Funktionsgleichung

Steigung m
 y-Achsenabschnitt t

Die Funktion $f(x)$ wird als Linie gezeichnet.

Beispiel für die Wahl der Parameter

$$m \quad 0,9$$

$$t \quad 1$$

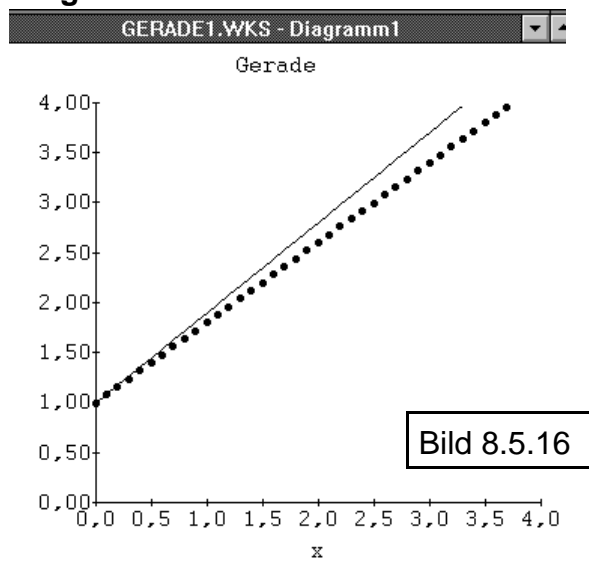
$$f(x): y = 0,9 x + 1$$

Bild 8.5.14

Rechenblatt mit Formeln

x0:	0	m:	0,9
dx:	0,1	t:	1
y0:	1		
y':	0,8		
x	y	f(x)	
=\$x0	1	=\$m*ZS(-2)+\$t	
=Z(-1)S+\$dx	=Z(-1)S+\$y'*\$dx	=\$m*ZS(-2)+\$t	
=Z(-1)S+\$dx	=Z(-1)S+\$y'*\$dx	=\$m*ZS(-2)+\$t	
=Z(-1)S+\$dx	=Z(-1)S+\$y'*\$dx	=\$m*ZS(-2)+\$t	
:	:	:	

Diagramm



Die gewählten Werte der Parameter x_0 , dx , y' und y_0 bleiben im folgenden fest.

In der allgemeinen Form der Geradengleichung

$$f(x): y = m x + t$$

werden nun die Parameter m und t solange von Hand variiert, bis die Werte der Spalte $f(x)$ mit den Werten der Spalte y übereinstimmen. Dann liegen im Diagramm auch die Punkte der Spalte y auf der Geraden $f(x)$. Damit ist gezeigt, daß die Werte der Spalte y der Geradengleichung gehorchen. Dabei

ergibt sich der Parameter t (y -Achsenabschnitt) als Anfangswert y_0 , m (Steigung) als Rate y' .

8.5.6 Quadratische Funktion (Parabel)

Anwendungsbeispiel:

Ein Körper werde z. B. beim freien Fall durch eine konstante Kraft gleichmäßig beschleunigt.

Die konstante Beschleunigung y'' (a) erhöht die Geschwindigkeit y' (v) pro Zeitschritt dx (dt) um einen gleichen Betrag $dy' = y'' \cdot dx$ ($dv = a \cdot dt$). Der pro Zeitschritt zurückgelegte Weg ergibt sich aus dieser Geschwindigkeit $y'(v)$ durch $dy = y' \cdot dx$ ($ds = v \cdot dt$) und wird seinerseits zum bisher zurückgelegten Weg y (s) dazuaddiert:

$$y_n = y_{n-1} + dy_n \quad \text{bzw.}$$

$$y_n = y_{n-1} + y'_n \cdot dx$$

$$(s_n = s_{n-1} + v_n \cdot dt).$$

Der konstante Zufluß y'' wird also pro Zeitschritt in der Zustandsgröße y' akkumuliert, die Zustandsgröße y' ihrerseits pro Zeitschritt in der Zustandsgröße y .

Zustandsgröße

Weg y (s) [m]

Raten

Geschwindigkeit y' (v) [$m^* s^{-1}$]
 Beschleunigung y'' (a) [$m^* s^{-2}$]

Kausaldiagramm



Bild 8.5.17

Flußdiagramm:

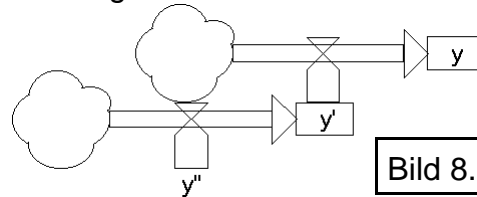


Bild 8.5.18

Modellgleichungen

Zeit $x_n = x_{n-1} + dx$
 Geschwindigkeit $y'_n = y'_{n-1} + y'' \cdot dx$
 Weg $y_n = y_{n-1} + y'_n \cdot dx$

Die Rate y'_n , die in y akkumuliert wird, ist im Gegensatz zum vorigen Fall nicht konstant, sondern ergibt sich ihrerseits durch Akkumulation von y'' .

Eingabeparameter

Anfangswert für x : x_0 (t_0) [s]
 Schrittweite für x : dx (dt) [s]
 Rate für y' : y'' (a) [$m^* s^{-2}$]
 Anfangswert für y' : y'_0 (v_0) [$m^* s^{-1}$]
 Anfangswert für y : y_0 (s_0) [m]

Da die Punkte für y offenbar auf einer Parabel liegen, werden zum Vergleich die Werte aus der quadratischen Funktion ermittelt. Die allgemeine Parabelgleichung lautet:

$$f(x): y = a x^2 + b x + c$$

mit den Eingabeparametern a , b und c .

Rechenblatt mit Formeln: Bild 8.5.19

x_0 :	0	...
dx :	0,1	...
y'' :	1	...
x	y'	...
$=\$x_0$	-1	...
$=Z(-1)S+\$dx$	$=Z(-1)S+\$y''*\dx	...
$=Z(-1)S+\$dx$	$=Z(-1)S+\$y''*\dx	...
$=Z(-1)S+\$dx$	$=Z(-1)S+\$y''*\dx	...
:	:	...

...a:	0,5	Bild 8.5.20
...b:	-1	
...c:	4	
...y	f(x)	
...4	= $\$a*ZS(-3)^2+\$b*ZS(-3)+\$c$	
...=Z(-1)S+ZS(-1)*\$dx		
	= $\$a*ZS(-3)^2+\$b*ZS(-3)+\$c$	
...=Z(-1)S+ZS(-1)*\$dx		
	= $\$a*ZS(-3)^2+\$b*ZS(-3)+\$c$	
...Z(-1)S+ZS(-1)*\$dx		
	= $\$a*ZS(-3)^2+\$b*ZS(-3)+\$c$	
...:	:	

Durch die Variation der Parameter ergeben sich im Rechenblatt verschiedene Wertetabellen für x und y, die im Diagramm jeweils als Punkte dargestellt werden.

Beispiel für die Wahl der Parameter

x_0	0
dx	0,1
y''	0,8
y_0	4
y'_0	-1
a	0,5
b	-1
c	4
$f(x)$:	$y = 0,5 x^2 - x + 4$

Rechenblatt mit Zahlenwerten

PARABEL1.WKS				
A	B	C	D	E
x0:	0		a:	0,5
dx:	0,1		b:	-1
y'':	1		c:	4
x	y''	y'	y	f(x)
0,00		-1,000	4,000	4,000
0,10	0,1	-0,900	3,910	3,905
0,20	0,1	-0,800	3,830	3,820
0,30	0,1	-0,700	3,760	3,745
0,40	0,1	-0,600	3,700	3,680
0,50	0,1	-0,500	3,650	3,625
0,60	0,1	-0,400	3,610	3,580
0,70	0,1	-0,300	3,580	3,545
0,80	0,1	-0,200	3,560	3,520
0,90	0,1	-0,100	3,550	3,505
1,00	0,1	0,000	3,550	3,500
1,10	0,1	0,100	3,560	3,505
1,20	0,1	0,200	3,580	3,520
1,30	0,1	0,300	3,610	3,545
1,40	0,1	0,400	3,650	3,580

Bild 8.5.21

Diagramm

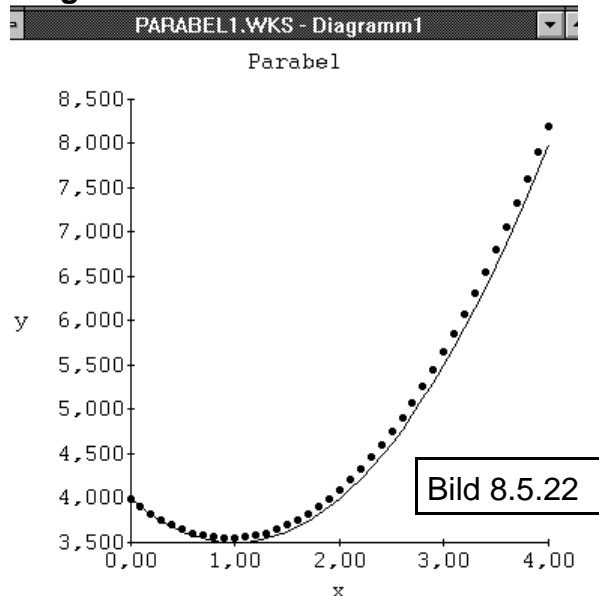


Bild 8.5.22

Die gewählten Werte der Parameter x_0 , dx , y'' , y'_0 und y_0 bleiben im folgenden fest. In der allgemeinen Form der Parabelgleichung

$$f(x): y = a x^2 + b x + c$$

werden nun die Parameter a , b und c solange von Hand variiert, bis die Werte der Spalte $f(x)$ mit den Werten der Spalte y übereinstimmen. Dann liegen im Diagramm auch auch die Punkte der Spalte y auf der Kurve für $f(x)$. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$a = 0,5 y''$$

$$b = (0,5 dx - x_0) y'' + y'_0$$

$$c = -0,5(dx - x_0)x_0 y'' - x_0 y'_0 + y_0$$

Damit ist gezeigt, daß die Werte der Spalte y der Parabelgleichung $f(x)$ gehorchen.

8.5.7 Exponentialfunktion

Beispiel

Ungebremstes Wachstum einer Population von Lebewesen, z. B. Kaninchen, Bakterien usw.

In der Größe y (p : Population) akkumuliert sich pro Zeiteinheit die Rate y' (g : Geburten). Diese Rate hängt ihrerseits von der Größe y (p) selbst sowie

einem Vermehrungsfaktor k ab. Im Kausaldiagramm und im Flußdiagramm ist ein positiver (verstärkender) Regelkreis erkennbar.

Zustandsgrößen

Population y (ρ) []

Raten

Geburten y' (g) [Jahr⁻¹]

Kausaldiagramm

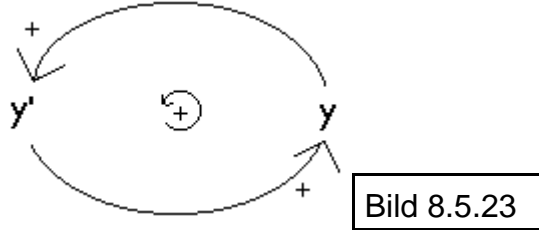


Bild 8.5.23

Flußdiagramm

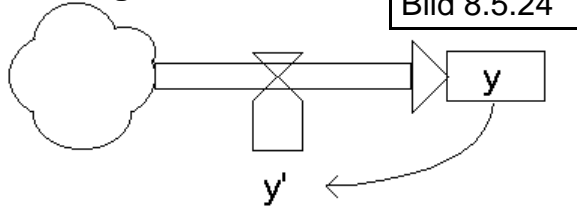


Bild 8.5.24

Modellgleichungen

Zeit $x_n = x_{n-1} + dx$
 Geburten $y'_n = y_{n-1} \cdot k$
 Population $y_n = y_{n-1} + y'_n \cdot dx$

Eingabeparameter

Anfangswert für x : x_0 (t_0) [Jahr]
 Schrittweite für x : dx (dt) [Jahr]
 Anfangswert für y : y_0 (ρ_0) []
 Rate y' (g) [Jahr⁻¹]
 Faktor k (k)

Rechenblatt mit Formeln

x_0 :	0	...
dx :	0,1	...
k :	2	...
x	y'	...
$=\$x_0$...
$=Z(-1)S+\$dx$	$=Z(-1)S(+1)*\$k*\dx	...
$=Z(-1)S+\$dx$	$=Z(-1)S(+1)*\$k*\dx	...

Bild 8.5.25

...a:	$=Z7S3/(1+\$k*\$dx)^{(\$x0/\$dx)}$
...b:	$=LN(1+\$k*\$dx)/\$dx$
...	
...	
...y	
...1	$=\$a*EXP(\$b*ZS(-3))$
...	$=Z(-1)S+ZS(-1) =\$a*EXP(\$b*ZS(-3))$
...	$=Z(-1)S+ZS(-1) =\$a*EXP(\$b*ZS(-3))$

Beispiel für die Wahl der Parameter

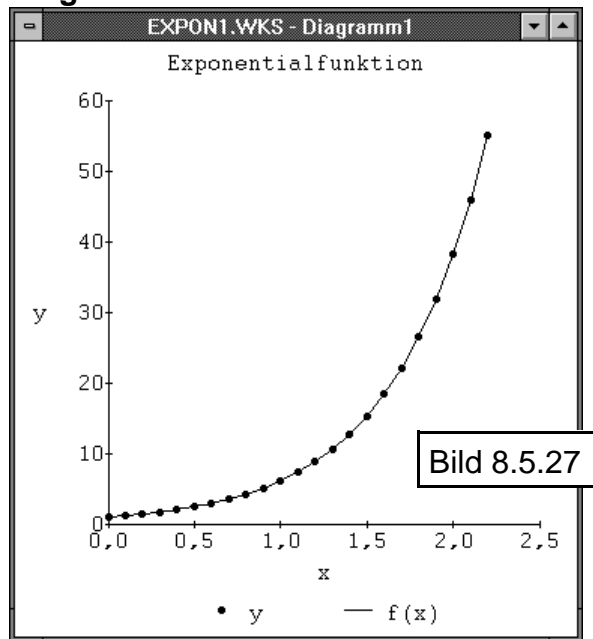
x_0 0
 dx 0,1
 k 2,0
 y_0 1

Rechenblatt mit Zahlenwerten

EXPON1.WKS				
	A	B	C	D
2	dx:	0,1	b:	1,82322
3	k:	2,0		
4				
5	x	y'	y	f(x)
6	0,00		1,000	1,000
7	0,10	0,200	1,200	1,200
8	0,20	0,240	1,440	1,440
9	0,30	0,288	1,728	1,728
10	0,40	0,346	2,074	2,074
11	0,50	0,415	2,488	2,488
12	0,60	0,498	2,986	2,986
13	0,70	0,597	3,583	3,583
14	0,80	0,717	4,300	4,300
15	0,90	0,860	5,160	5,160
16	1,00	1,032	6,192	6,192
17	1,10	1,238	7,430	7,430
18	1,20	1,486	8,916	8,916
19	1,30	1,783	10,699	10,699
20	1,40	2,140	12,839	12,839
21	1,50	2,568	15,407	15,407
22	1,60	3,081	18,488	18,488

Bild 8.5.26

Diagramm



Die gewählten Werte der Parameter x_0 , dx , y'_0 , k und y_0 des Systems bleiben im folgenden fest. Zum Vergleich wird die Kurve der Exponentialfunktion darübergelegt. In der allgemeinen Form ihrer Gleichung

$$f(x) : y = a \cdot e^{b \cdot x}$$

werden die Parameter a und b solange von Hand variiert, bis die Werte der Spalte $f(x)$ mit den Werten der Spalte y übereinstimmen. Dann liegen im Diagramm auch die Punkte der Spalte y auf der Kurve für $f(x)$. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$a = y_0 / (1 + k \cdot dx)^{x_0/dx}$$

$$b = \ln(1 + k \cdot dx) / dx.$$

Damit ist gezeigt, daß die Werte der Spalte y der Gleichung der Exponentialfunktion gehorchen.

Folgende Variationen der Systemparameter seien empfohlen:

- y_0 negativ:
exponentielles Wachstum ins Negative,
- k negativ:
exponentieller Zerfall.

8.5.8 Kosinus-/Sinusfunktion

Beispiel:

elastische Schwingung eines Massestücks an einer Feder mit der Auslenkung y (s), der Geschwindigkeit y' (v) und der Beschleunigung y'' (a). Da letztere der Auslenkung umgekehrt proportional ist, liegt ein negativer Regelkreis vor.

Zustandsgrößen

Weg y (s) [m]

Raten

Geschwindigkeit y' (v) [$m \cdot s^{-1}$]

Beschleunigung y'' (a) [$m \cdot s^{-2}$]

Kausaldiagramm

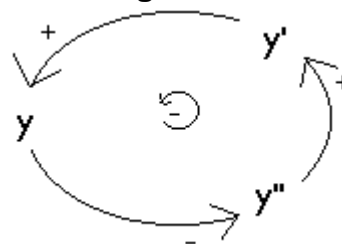


Bild 8.5.28

Flußdiagramm

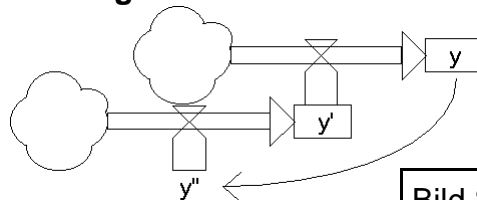


Bild 8.5.29

Modellgleichungen

Zeit $x_n = x_{n-1} + dx$

Geschwindigkeit $y'_n = y'_{n-1} + y''_{n-1} \cdot dx$

Weg $y_n = y_{n-1} + y'_{n-1} \cdot dx$

Beschleunigung $y''_n = k \cdot y_{n-1}$

Rechenblatt mit Formeln

x0:	0	a:	...
dx:	0,05	b:	...
k:	4	c:	...
			...
x	d2y	dy	...
= \$x0	= \$k * Z(-1) S(+2) 0		...
= Z(-1) S + \$dx	= -ABS(\$k) * Z(-1) S(+2)		...
	= Z(-1) S + ZS(-1) * \$dx		...
= Z(-1) S + \$dx	= -ABS(\$k) * Z(-1) S(+2)		...
	= Z(-1) S + ZS(-1) * \$dx		...
= Z(-1) S + \$dx	= -ABS(\$k) * Z(-1) S(+2)		...
	= Z(-1) S + ZS(-1) * \$dx		...

...1		
...=WURZEL(ABS(\$k))		
...0		
...		
...y	f(x)	
...1	= \$a * COS(\$b * ZS(-4) + \$c)	
...=Z(-1) S + ZS(-1) * \$dx	= \$a * COS(\$b * ZS(-4) + \$c)	
...=Z(-1) S + ZS(-1) * \$dx	= \$a * COS(\$b * ZS(-4) + \$c)	
...=Z(-1) S + ZS(-1) * \$dx	= \$a * COS(\$b * ZS(-4) + \$c)	
...=Z(-1) S + ZS(-1) * \$dx	= \$a * COS(\$b * ZS(-4) + \$c)	

Bild 8.5.30

Durch die Variation der Parameter ergeben sich im Rechenblatt verschiedene Wertetabellen für x und y, die im Diagramm jeweils als Punkte dargestellt werden.

Beispiel für die Wahl der Parameter

x ₀	0	[s]
dx	0,05	[s]
a	1	
b	2	
c	0	
k	4	
y ₀	1	[m]

Rechenblatt mit Zahlenwerten

COSINUS1.WKS					
	A	B	C	D	E
1	x0:	0	a:	1	
2	dx:	0,05	b:	2	
3	k:	4	c:	0	
4					
5	x	d2y	dy	y	f(x)
6	0,00	0,000	0,000	1,000	1,000
7	0,05	-4,000	-0,200	0,990	0,995
8	0,10	-3,960	-0,398	0,970	0,980
9	0,15	-3,880	-0,592	0,940	0,955
10	0,20	-3,762	-0,780	0,901	0,921
11	0,25	-3,606	-0,960	0,853	0,878
12	0,30	-3,414	-1,131	0,797	0,825
13	0,35	-3,188	-1,290	0,732	0,765
14	0,40	-2,930	-1,437	0,661	0,697
15	0,45	-2,642	-1,569	0,582	0,622
16	0,50	-2,328	-1,686	0,498	0,540
17	0,55	-1,991	-1,785	0,409	0,454
18	0,60	-1,634	-1,867	0,315	0,375
19	0,65	-1,261	-1,930	0,219	0,297

Bild 8.5.31

Diagramm

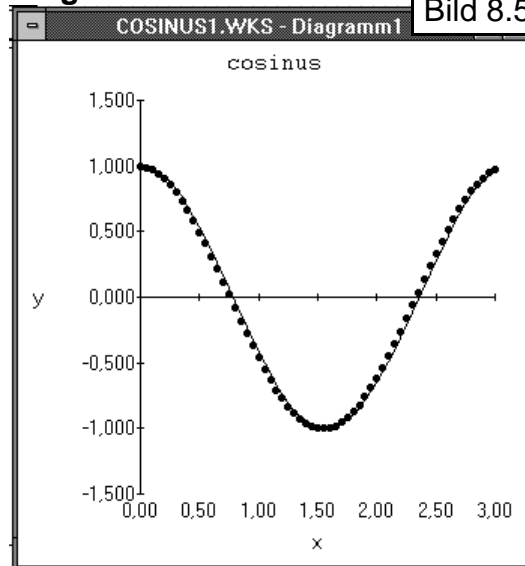


Bild 8.5.32

Die gewählten Werte der Parameter x_0 , dx , y'' , $y'(x_0)$ und $y(x_0)$ bleiben im folgenden fest. In der allgemeinen Form der Winkelfunktion

$$f(x): y = a \cos(b x + c)$$

werden nun die Parameter a , b und c solange von Hand variiert, bis die Werte der Spalte $f(x)$ mit den Werten der Spalte y übereinstimmen. Dann liegen im Diagramm auch die Punkte der Spalte y auf der Kurve für $f(x)$. Dies lässt sich nur annähernd durchführen.

Damit ist gezeigt, daß sich die Werte der Spalte y durch die Kosinusfunktion annähern lassen.

8.5.9 Logistische Wachstumskurve [S-Kurve]

Beispiel: Logistisches Wachstum bei der Ausbreitung einer Krankheit in einer geschlossenen Population

Die Zahl der Kranken k erhöht sich jeweils um die Infektionen, die Zahl der Gesunden g nimmt um diese Zahl ab. Die Infektionen i werden als proportional zur Zahl der Kranken sowie zur Zahl der Gesunden und einer Ansteckungswahrscheinlichkeit (Konstante w) angenommen.

Die Zahl der Kranken ist mit der Infektionsrate positiv, also verstärkend rückgekoppelt; es ist ein in erster Näherung exponentielles Anwachsen zu erwarten. Die Zahl der Gesunden bildet mit der Infektionsrate jedoch einen negativen Regelkreis; dies allein würde zu einer Dämpfung bzw. einem exponentiellen Abklingen führen. Beide Regelkreise sind jedoch miteinander gekoppelt. Eine qualitative Prognose scheint also a priori nicht möglich.

Das vorliegende Modell bildet einen ersten Einstieg in komplexere Modellstrukturen, die keine geschlossene, algebraisch formulierbare Lösungsfunktion mehr besitzen. Dennoch zeigen auch hier topologisch gleichartige Modelle gleichartiges zeitliches Verhalten.

Zustandsgrößen

Gesunde g []
 Kranke k []

Rate

Infektionen i [Tag⁻¹]

Kausaldiagramm

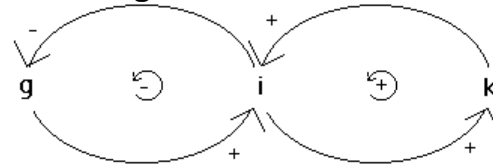


Bild 8.5.33

Flußdiagramm

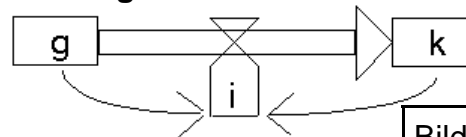


Bild 8.5.34

Modellgleichungen

Zeit $x_n = x_{n-1} + dx$, bzw. $t_n = t_{n-1} + dt$
 Kranke $k_n = k_{n-1} + i_{n-1} \cdot dt$
 Gesunde $g_n = g_{n-1} - i_{n-1} \cdot dt$
 Infektionen $i_n = g_n \cdot k_n \cdot w$

Eingabeparameter

Anfangswert für x : $(x_0) t_0$ [Tage]
 Schrittweite für x : $(dx) dt$ [Tage]
 Anfangswert für g : g_0 [Personen]
 Anfangswert für k : k_0 [Personen]
 Ansteckungswahrscheinlichkeit w [Personen⁻²•Tag⁻¹]

Beispiel 1 Ansteckungswahrscheinlichkeit $w = 0,5$:

Rechenblatt mit Zahlenwerten

SEUCHE1.WKS				
	A	B	C	D
	Ausbreitung einer			
	p:	5000		
	i:	0,5		
	t	g	i	k
0		4999	0	1
1		4999	0	1
2		4998	1	2
3		4997	1	3
4		4995	2	5
5		4992	3	8
6		4989	4	11
7		4983	6	17
8		4974	8	26
9		4962	13	38
10		4943	19	57
11		4914	28	86
12		4872	42	128

Bild 8.5.35

Diagramm

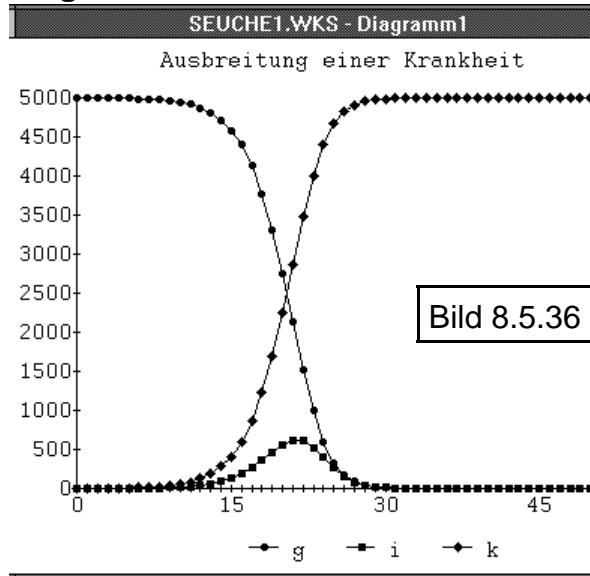


Bild 8.5.36

Anfangs überwiegt der steigende Einfluß des positiven Regelkreises, die Zahl der Kranken wächst etwa exponentiell an. Ungefähr bei gleich vielen Gesunden und Kranken wird der dämpfende Einfluß des negativen Regelkreises deutlich wirksam. Die Ansteckungsrate ist zwar hier am höchsten, nimmt aber nicht weiter zu. Die Zahl der Kranken wächst danach immer langsamer an eine Grenze heran, nämlich die gesamte Population.

Eine Formulierung als analytische Funktion könnte die Form haben:

$$y = \frac{a}{b + e^{c \cdot x}}$$

Auch für diese Funktion ließe sich durch systematische Variation der Parameter a , b und c eine weitgehende Annäherung an die Tabellenwerte erreichen. Eine solche Funktion dürfte jedoch i. a. den Rahmen einer Mittelstufenmathematik sprengen.

Beispiel 2 Ansteckungswahrscheinlichkeit $w = 2,0$:

Bei gleicher Struktur des Modells und damit auch des Rechenblatts soll nun

mit verschiedenen Parameterwerten experimentiert werden. Es soll der Faktor w auf den Wert 2,0 gesetzt werden. Eine Interpretation von w als Wahrscheinlichkeit der Ansteckung pro Tag ist dann natürlich unsinnig, dennoch läßt sich das Modell formal durchrechnen.

Rechenblatt mit Zahlenwerten

KRANKHE1.WKS				
A	B	C	D	
Ausbreitung einer Krank				
p:	5000			
w:	2			
t	g	i	k	
0	4999	0	1	
1	4997	2	3	
2	4991	6	9	
3	4973	18	27	
4	4919	54	81	
5	4761	159	239	
6	4306	455	694	
7	3110	1196	1890	
8	758	2351	4242	
9	-528	1286	5528	
10	640	-1168	4360	
11	-476	1116	5476	
12	567	-1043	4433	

Bild 8.5.37

Diagramm

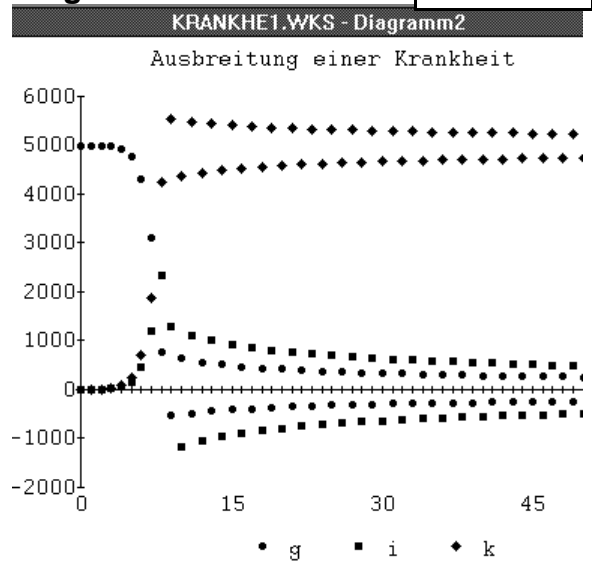


Bild 8.5.38

Natürlich sind die entstehenden negativen Zahlen für die Gesunden, Kranken und die Ansteckung irrational. Das rechnerische Modell verhält sich jedoch höchst interessant: nach einer

Anfangsphase, die der einer vernünftigeren Simulation vergleichbar ist, fangen die Werte für k , g und i an, jeweils zwischen zwei (oder mehr) Werten hin und her zu springen. Bei einem beliebig kleinen Zeitschritt wäre ab diesem Zeitpunkt tatsächlich eine Verzweigung (Bifurkation) der Kurve in mehrere Äste übereinander sichtbar. Das System nimmt also gleichzeitig verschiedene Zustände an, bzw. ist sein Zustand (bei endlich großem Zeitschritt)

nicht vorherzuberechnen, da er von minimalen Änderungen der Anfangsbedingungen maximal abhängt. Das System zeigt chaotisches Verhalten. Man spricht von einem Feigenbaum-Diagramm. Die graphische Darstellung unter MS-Works ist hier jedoch überfordert; Werkzeuge mit feineren graphischen Möglichkeiten sind hier besser geeignet.

9 Fraktale und Chaos

9.1 Wege in die fraktale Geometrie

Im Rahmen dieser Unterrichtseinheiten sollen die Schüler Einblicke in die fraktale Geometrie erhalten und somit ein tieferes Verständnis zur Erzeugung von Feigenbaum-Diagrammen erlangen und den Zusammenhang zu dem berühmten Apfelmännchen sehen. Einen Überbegriff stellt der Begriff der selbstähnlichen Figuren dar. Schwerpunkt ist hier (A) der Zugang über das Verhalten von Folge anhand einerseits und unabhängig davon über einen (B) Weg durch die Betrachtung von quadratischen Funktionen. Dabei ist die Beschränkung auf reelle Zahlen in der Sekundarstufe I zwingend. Auf eine genaue mathematische Beweisführung wird bewußt verzichtet. Die Darstellung teilt sich in drei Abschnitte:

- Arbeitsblatt für den Schüler mit kurzen Hinweisen für den Schüler
- Ergänzende Anmerkungen und Zusammenhänge wie sie in einführenden Unterrichtsgesprächen hilfreich sein können.
- Hinweise zur Bedienung der hier verwendeten Tabellenkalkulation VIVITAB.

Lehrplanbezug: Iterationen und deren Darstellung als Folgen, Auswertung in Form von Diagrammen und als Einschränkung von Funktionen, Lösen quadratischer Gleichungen

Zeitbedarf: Minimal 3 Unterrichtsstunden, nach oben sehr weit ausbaubar, nicht zuletzt durch die Vergabe von weiterführenden Aufgaben für interessierte Schüler.

Reihenfolge der Arbeitsblätter: A1 -> A2 Teil 1, Teil 2 -> AB3 -> AB4 oder B1 -> B2 -> AB3 -> AB4

Voraussetzungen

Mathematik: Begriff der Funktion, Darstellung von Funktionsgraphen, sicherer Umgang mit Wertetabellen, Lösen quadratischer Gleichungen

Informatik: Umgang mit einer Tabellenkalkulation; besonders dafür geeignet ist eine Tabelle, die die Darstellung von Grafik und Tabelle nebeneinander erlaubt, wie VIVITAB.

Literatur

- [1] Ein Weg zur fraktalen Geometrie, Reinhard Behr, Stuttgart 1989
- [2] Fraktale verstehen und selbst programmieren, Hans Lauwerier, Hückelhoven 1989
- [3] Die fraktale Geometrie der Natur, Benoit B. Mandelbrot, Basel 1987
- [4] Fractals for the classroom, Peitgen, Jürgens, Saupe u. a., New York 1991
- [5] Dormayer, Chaos bei der Feigenbaumabbildung $f(x) = 4x(1-x)$,
Didaktik der Mathematik 3/91

Zum Arbeitsblatt A1

Eine Einstimmung können Bilder aus den Standardwerken der fraktalen Geometrie (Peitgen - Richter, Mandelbrot oder Dias, wie sie Literatur [4] beigelegt sind) liefern.

zu Aufgabe 1 und 2

Es soll durch mehr spielerisches Rechnen den hinführenden Zugang zu Zahlenfolgen schaffen. Das Berechnen per Hand oder mit dem Taschenrechner ist dem Einsatz des Rechners an dieser Stelle vorzuziehen. Ziel ist hier lediglich, die Folge als Funktion über \mathbb{N} , die Begriffe Startwert, Anfangsglied, Folgenglieder, Vorgänger, Nachfolger bereitzustellen.

Die Schwierigkeiten bei der Angabe einer Folgenrechtschrift, einem Bildungsgesetz der Folge in Analogie zur Funktionsvorschrift, führt zu dem Begriff der schrittweisen Berechnung der Folgenglieder aus dem jeweiligen Vorgänger. Es kann hier also i. a. keine Formel für die Folgenrechtschrift wie bei der Funktionsvorschrift zur Berechnung aus dem Wert der unabhängigen Variablen angegeben werden. Diese zwingende schrittweise Berechnung führt auf den Begriff der Iteration.

Der Vergleich der beiden Folgen der Aufgabe 1 zeigt nur, daß in Abhängigkeit für Startwerte größer 1 die Folgenglieder immer größer werden, für Startwerte kleiner 1 gegen Null streben. Eine Untersuchung für Startwerte aus $]-\infty; -1[$ bzw. aus $]-1; 0[$ ist hier denkbar.

Zu Aufgabe 3

Das Ablesen aus Wertetabellen soll geübt werden und die Zuordnung von unabhängiger Variabler n aus \mathbb{N} und dem Folgenwert verdeutlicht werden. Die Lösungen der Aufgabe sind direkt aus der selbsterstellten Tabelle zu entnehmen. Der sinnvolle Einsatz eines Rechners durch das schnelle Erstellen von Tabellen wird hier jedoch vorbereitet. Klar zu erkennen ist, daß der Rechner nur Rechnerarbeit abnimmt, die Formulierung des Bildungsgesetzes aber nicht bewerkstelligt.

Zu Aufgabe 4

Diese Aufgabe ist so gestellt, daß auf eine fertige Tabelle zurückgegriffen wird. Im Vordergrund steht das Üben im Umgang mit dem Rechner und erste Schritte im Umgang mit dem Tabellenkalkulationsprogramm. Ein Protokollieren von Ergebnissen im Heft der Schüler ist immer nötig, um weiterreichende Schlußfolgerungen oder reproduzierbare Randbedingungen erzeugen zu können.

Arbeitsblatt A1

Fortgesetztes Quadrieren einer Zahl

Aufgabe 1:

- a) Quadriere die Zahl 1,4.
Quadriere dieses Ergebnis wieder.
Bilde darauffolgende Zahlen, in dem du immer wieder die berechnete Zahl quadrierst. Führe das fortgesetzte Quadrieren mindestens fünfmal durch. Schreibe deine Ergebnisse in Form einer Wertetabelle mit der ersten Spalte n , $n \in \mathbb{IN}$ und der zweiten Spalte für die berechneten Zahlen.

Begriff der Folge: Die von dir berechnete Zahlen stellen eine Folge von Zahlen dar. Dabei wird jedem Element n aus der Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{IN} eine Zahl aus der Menge der rationalen (oder auch reellen) Zahlen zugeordnet. Ein Folge ist eine besondere Form der Funktion mit der Definitionsmenge \mathbb{IN} . Die formale Schreibweise: $(a(n)): n \text{ -----} \rightarrow a(n), \mathbb{IN} \text{ -----} \rightarrow \mathbb{Q}$ (oder \mathbb{IR})

Frage: Versuche die Funktionsvorschrift bzw. das Bildungsgesetz für die Folge anzugeben. Vergleiche z. B. auch mit der Funktionsvorschrift der linearen Funktion oder mit der der quadratischen Funktion. Was ist hier anders?

- b) Du erhältst eine andere Folge, die nach dem oben beschriebenen Verfahren berechnet wird, wenn du mit einer anderen Zahl das laufende Quadrieren beginnst. Man nennt diese Zahl der Ordnungszahl 1 deshalb auch Anfangsglied oder Startwert der Folge. Setze $a(1) = 0,6$. Berechne wieder fünf Folgenglieder und lege eine Wertetabelle an.
- c) Vergleiche beide Wertetabellen und beschreibe das Verhalten der Folgen.

Aufgabe 2:

- a) Wieviele Iterationsschritte sind nötig, daß das Folgenglied größer als 100 wird, wenn du für den Startwert 1) $a(1) = 1,01$ bzw. 2) $a(1) = 1,001$ setzt?

Hinweis: Spätestens jetzt wirst du feststellen, daß hier der Einsatz eines Taschenrechners oder eines Computers eine große Erleichterung darstellt. Welche Nachteile zeigen sich jedoch bei der Zahlendarstellung? Übertrage die Aufgabe auf eine Tabellenkalkulation auf einem Rechner und bestimme aus der erzeugten Tabelle die Lösung der Aufgaben.

- b) Wieviele Iterationsschritte sind nötig, daß das Folgenglied kleiner als 0,01 wird, wenn der Startwert $a(1) = 0,99$ bzw. $a(1) = 0,999$ gewählt wird? Lies aus der Tabelle ab! Ändere Die Zahlendarstellung und die Zeilenzahl so ab, daß du das Ergebnis gut ablesen kannst!

Zusatzaufgabe: Kannst du die Anzahl der Iterationsschritte auch direkt berechnen?

Lösen der Aufgaben mit Hilfe des Rechners und mit dem Programm VIVITAB:

Lade dazu das Tabellenkalkulationsblatt und dann die Tabelle GEOFRAK1!

Aufgabe 3:

Gehe an das Ende der Tabelle und betrachte die Folgenglieder. Notiere dir die Folgenglieder in eine Tabelle in dein Heft, die sich noch voneinander unterscheiden. Ändere selbständig die Startwerte und schreibe wieder die letzten Folgenglieder auf! Beschreibe deine Beobachtungen!

Lösungshinweise zum Arbeitsblatt A1:

Zu Aufgabe 1a, b:	$1,4^2$	$= 1,96$	$0,6^2$	$= 0,36$
	$1,96^2$	$= 3,8416$	$0,36^2$	$= 0,1296$
	$3,6416^2$	$= 14,75789056$	$0,1296^2$	$= 0,01679616$
	$14,75789056^2$	$= 217,795333..$	$0,01679616^2$	$= 0,0002821..$
	$217,795333..$	$= 47434,8074....$	$0,0002821..^2$	$= 0,00000007...$

Zu Aufgabe 2 a, b: für $a(1) = 1,01 \Rightarrow n = 10$ für $a(1) = 1,001 \Rightarrow n = 14$
für $a(1) = 0,99 \Rightarrow n = 9$ für $a(1) = 0,999 \Rightarrow n = 13$

Zu Aufgabe 3: Bild der Tabelle

Lösung der Zusatzaufgabe:

Gesucht n aus IN mit	$(1,001)^{2(n-1)}$	> 100
$= >$	$2^{(n-1)} * \lg 1,001$	$> \lg 100$
$= >$	$2^{(n-1)}$	$> 2 / \lg 1,001$
$= >$	$(n-1) * \lg 2$	$> \lg (2 / \lg 1,001)$
$= >$	$n - 1$	$> 12,169758...$
$= >$	n	$= 14$

Einsatzhinweise zum Rechner und zum Programm:

Aktion	Arbeitsanweisung
Laden und Starten der Tabellenkalkulation	
	a: vivitab
Bewegen in der Tabelle	
Zeile wechseln	Cursor-up; Cursor-down
Spalte wechseln	Tab; shift-Tab
Bildschirmseite wechseln	Page-up; Page-down
Eintrag von Zahlen in die Tabelle	Zahlen eingeben; Dezimalpunkt statt -komma
Übernahme der Zahlen	mit Cursor die Zeile wechseln oder Return
Korrektur von Eingaben	Überschreiben der Zahl oder mit Pfeil links Einfügen mit Taste 'Einfg' oder 'Insert'
Anlegen der n-Spalte	mit Shift-Tab in der 1. Spalte die Zeilenzahl auf 50 setzen
Anlegen der Wertespalte	mit Cursor-up die Spaltenbezeichnung a(n) eintragen
Formel angeben	$a(n) = : a(n)^2$ eintragen; ':' bedeutet den Zugriff auf die vorangehende Zeile
Breite der Spalte	Taste 'b'
Notationsformat	Taste 'n'
Aufforderung zur Berechnung der Tabelle	Taste 'r'

Arbeitsblatt A2 - Teil 1 Besondere Zahlen einer Folge

Die hier gestellten Aufgaben sind leichter mit einer Tabellenkalkulation zu bearbeiten.

Aufgabe 1: Betrachte die Folge $(a(n))$ mit dem Bildungsgesetz $a(n+1) = [a(n)]^2 - 1$. Setze zunächst das Anfangsglied $a(1) = 0,5$. Erstelle die Tabelle mit mindestens 50 Zeilen.

- Notiere dir $a(2)$, $a(3)$, $a(4)$, ..., $a(9)$, also den Anfang der Folge in dein Heft!
- Notiere dir dann einen Ausschnitt in der Mitte der Tabelle, z. B. $a(20)$, $a(21)$, ... $a(25)$. Was fällt dir auf? Halte deine Beobachtung schriftlich fest.
- Experimentiere mit anderen Anfangsgliedern dieser Folge und notiere dir den Startwert und das Verhalten eines geeigneten Tabellenausschnittes. Untersuche die Folgeglieder auch für $n > 200$.

- Das Arbeitsblatt hier teilen und erst nach der Bearbeitung der Aufgabe 1 austeilen!

Bezeichnungen

Die Beobachtungen aus der Aufgabe 1 zeigen, daß man zwei Fälle in Abhängigkeit vom Anfangsglied der Folge unterscheiden kann:

- Fall: Für großes n gilt $a(n)$ wird immer größer - strebt gegen unendlich
- Fall: Für großes n gilt $a(n) = -1$ oder $a(n) = 0$. Genauer: Hier scheinen zwei Folgen ineinander verzahnt zu sein, ähnlich einem Reißverschluß, von denen die eine gegen die Zahl -1 und die andere für großes n gegen 0 geht.

Mache dir klar, ob die Zahlen 0 und -1 tatsächlich angenommen werden oder ob dies ein Problem der Zahlendarstellung des Rechners sind.

Begriff des Attraktors:

Gilt für großes n , daß schließlich $a(n)$ gegen eine Zahl a strebt, so heißt diese Zahl a ein Attraktor der Folge.

Ergebnis aus den Untersuchungen in Aufgabe 1:

Die Folge $(a(n))$ mit dem Bildungsgesetz $a(n+1) = [a(n)]^2 - 1$ zeigt, daß eine Folge mehrere Attraktoren haben kann. Die hier untersuchte Folge hat die Attraktoren -1 und 0 .

Darstellung der Tabelle in einer Graphik:

Die Folgenrechtschrift lautet wie bisher $a(n+1) = [a(n)]^2 - 1$ mit dem Anfangsglied $a(1) = 0,5$. Die Tabelle sollte mindestens 200 Zeilen haben.

Aufgabe 2:

Stelle die Tabelle in Form einer Graphik dar.

Horizontale Achse: $0 \leq n \leq 200$; vertikale Achse: $-2 \leq a(n) \leq 2$.

Wähle eine geeignete Diagrammform, z. B. Liniengraph, Punktegraph, Balkendiagramm usw...

Erstelle einen Bildschirm Ausdruck und klebe diesen in dein Heft.

Arbeitsblatt A2 - Teil 2 Besondere Zahlen einer Folge

Aufgabe 3:

- Untersuche weiter die Folge $a(n+1) = [a(n)]^2 - 1$. Erforsche das Verhalten der Folge einmal für den Startwert $a(1) = 1,618034$ und dann für das Anfangsglied $a(1) = 1,618033$. Werte dazu die Tabelle und die Graphik aus.
- Verfahre ebenso bei dieser Folge mit den Startwerten $a(1) = -0,618034$ und $a(1) = -0,618033$. Hier verhält sich die Folge anders.

Begriff des Fixpunktes

Gilt schließlich für alle n aus \mathbb{N} , daß die Folgenglieder gleich bleiben, so heißt diese Zahl Fixpunkt a^* Folge, d. h. $a(1) = a(2) = \dots = a(n) = a(n+1) = \dots = a^*$.

Ergebnisse aus der Aufgabe 3:

Die Folge $a(n+1) = [a(n)]^2 - 1$ hat zwei Fixpunkte im Intervall $[1,618033; 1,618034]$ und in $[-0,618034; -0,618033]$

Aufgabe 4:

Die Fixpunkte der Folge lassen sich auch berechnen. Wende die Definition des Fixpunktes auf die Folge $a(n+1) = [a(n)]^2 - 1$ an und berechne daraus den Fixpunkt a^* .

Lösungshinweise zu den Aufgaben des Arbeitsblattes A2

Hinweise zur Tabellenkalkulation:

- Einträge in die Formelzeile der VIVITAB-Tabelle:
Zahl der Zeilen n : 200 ; Formel: $a(n) = \#a(n) * \#a(n) - 1$; Anfangswert $a(1)$ in der 1. Zeile: 0.5
- Graphische Darstellung der Tabelle
Vorteil des Programms VIVITAB ist, daß Tabelle und Graphik nebeneinander am Bildschirm gezeigt werden. Auf diese Weise können Änderungen in der Tabelle in ihrer Auswirkung auf die Graphik direkt beobachtet werden.

<u>Aktion</u>	<u>Arbeitsanweisung</u>
Zuschalten des Graphikfensters	Taste 'g'
Wahl der Achsenbereiche	Taste 'd' $0 \leq n \leq 200$; $-2 \leq a(n) \leq 2$
Einschalten der Zeichenautomatik	Taste 'z' ; Punkte 'p' Die Tabelle wird nach erneutem Berechnen dargestellt.

Lösungshinweise zum Arbeitsblatt A2 - Teil 2

Um letztlich einzusehen, was im Feigenbaum-Diagramm dargestellt wird, kann der 2. Teil dieses Arbeitsblattes auch übersprungen werden. Für Schüler, die sehr gewandt in der Bearbeitung der Aufgaben sind, sollen sie einen zusätzlichen Anreiz darstellen.

Das Ergebnis kann zusammengefaßt den anderen Schülern mitgeteilt werden und lautet etwa:

Der Attraktoren werden im allgemeinen nicht durch die Wahl der Startwerte beeinflusst, jedoch bestimmen diese die 'Schnelligkeit' der Konvergenz. Beginnt man die Folgenberechnung in der Nähe eines Fixpunktes, so strebt die Folge entweder gar nicht mehr oder nur sehr langsam gegen Attraktoren. Die Beobachtung zeigt, daß Startwerte a_0 aus $[0; 0,5]$ zu sinnvollen Ergebnissen führen.

Zu Aufgabe 4:

Ist a^* ein Fixpunkt der Folge, so gilt:

$$a(1) = a(2) = \dots = a(n) = a(n+1) = \dots = a^*$$

$$\Rightarrow a(n+1) = [a(n)]^2 - 1 \Rightarrow a^* = [a^*]^2 - 1$$

$$\Rightarrow a^*_1 = (1 + \sqrt{5})/2 \text{ und } a^*_2 = (1 - \sqrt{5})/2.$$

Arbeitsblatt AB3 Das Feigenbaum-Diagramm

Hier soll nun geklärt werden, was im bekannten Feigenbaum-Diagramm dargestellt ist. Einige Eigenschaften sollst du dann noch selbst herausfinden, die Begründung durch eine sorgfältige Beweisführung kann hier jedoch nicht erfolgen.

Die Folge, die du auf dem Arbeitsblatt 2 untersucht hast, lautete: $a(n+1) = [a(n)]^2 - 1$. Diese soll jetzt noch verallgemeinert werden.

Aufgabe 1:

Betrachte die Folge mit dem Bildungsgesetz $a(n+1)=[a(n)]^2+c$, c aus \mathbb{R} oder \mathbb{Q} .

- Setze zunächst $c = -1,3$ und entnimm der Tabelle und der grafischen Darstellung die Attraktoren. Wähle einen geeigneten Startwert.
- Verfahre ebenso mit $c = -0,3$.

Dokumentiere deine Ergebnisse auch mit Hilfe von Bildschirmausdrucken.

Aufgabe 2:

Um den Zusammenhang zwischen der im Bildungsgesetz der Folge auftretenden Zahl c und den Attraktoren finden zu können, lege eine Tabelle mit einer Spalte für die Zahl c und einer Spalte, in die du die von dir gefundenen Attraktoren einträgst.

- Trage die Werte für die Folge vom Arbeitsblatt 1 und 2 in die Tabelle ein.
- Wähle c aus $\{-1,2; -1,35; -1,4; -1,42; -1,5; -1,6; -1,7\}$.

Was fällt dir auf? Versuche deine Beobachtung zu beschreiben.!

Aufgabe 3:

Ein geeignete Auswertung dieser Tabelle ist ein Diagramm.

Zeichne ein Koordinatensystem mit einer c -Achse im Bereich $[-2; 2]$ und einer a -Achse, auf der du die Attraktoren anträgst, von -2 bis 1 . Übertrage deine Tabelle in dieses Diagramm so gut wie möglich.

Aufgabe 4:

Es soll nun mit einer Tabellenkalkulation das Diagramm für möglichst viele Zahlen c berechnet werden.

- Lege auf dem Rechenblatt folgende Spalten an: c $a(n)$ a
In die Formelspalte der c -Spalte trage $c = -1$ ein.
Die Formel für die Folgenrechnung lautet wieder $a(n+1) = [a(n)]^2 - 1$. Die Attraktoren kannst du ja am Tabellenende ablesen. Dieser Wert a muß dann der Zahl c zugeordnet in das Diagramm eingetragen werden. Der Rechner macht das Ablesen des Tabellenendes durch Einsetzen einer Bedingung in die Formel für a : Wenn die Zahl n der Schritte größer als 200 ist, dann soll $a = a(n)$ gesetzt werden. In der Schreibweise hier: $\text{if}(n > 200, a(n))$
- Schalte die Graphik und die Zeichenautomatik mit dem Parameter (p) ein. Wähle das Koordinatensystem, wie es in Aufgabe 3 beschrieben ist. Trage $c = -1$ als Formel in die c -Spalte ein und lasse die Tabelle durchrechnen. Wenn du alles richtig gemacht hast, erhältst du zwei Punkte im Diagramm an

den Stellen $(-1; 0)$ und $(-1; -1)$. Experimentiere dann mit anderen bereits bekannten Werten für c , z. B. $c = -0,3$; $-1,3$...!

- c) Dieser Vorgang, daß die Zahl c geändert wird, soll nun automatisch ablaufen. Dazu muß die Zahl c im Bereich von 0 bis -2 schrittweise erniedrigt werden. Das Programm sorgt für die richtige Entnahme der Attraktoren und überträgt sie in die Graphik. Fertige dann das c - a -Diagramm am Bildschirm und klebe einen Ausdruck dieses Diagramms in dein Heft. Es ist das berühmte Feigenbaumdiagramm!

Lösungshinweise zum Arbeitsblatt A3:

zu Aufgabe 1 ab, 2, 3: die Tabelle könnte folgendermaßen ausschauen:

c	a
0	0
-0,3	-0,2416....
-1	0; -1
-1,3	-1,1486...; - 1,2996...; 0,01943...; 0,3890...

zu Aufgabe 4:

Da hier ein wiederholtes Berechnen der Tabelle gefordert wird und sich die Verfahren in den verschiedenen Rechenblättern sehr unterscheiden, kann hier nur ein Lösungsverfahren besprochen werden.

Hinweise zu VIVITAB

Aktion	Arbeitsanweisung
Zuschalten des Graphikfensters	Taste 'g'
Wahl der Achsenbereiche	Taste 'd' $0 \leq n \leq 200$; $-2 \leq a(n) \leq 2$
Einschalten der Zeichenautomatik nach	Taste 'z' ; Punkte 'p'; die Tabelle wird erneutem Berechnen dargestellt.
Einschalten des wiederholten Rechnens	Taste 'w' und Angabe des Intervalls für c und der Schrittweite ...c : 0 , 2 , - 0.01
Leertaste	Abbruch der Berechnung
Formel in der a - Spalte	if(n > 200,a = a(n))
Durch diese Angabe wird das Ende der Tabelle gelesen und der Wert für n > 200 in die Darstellungsvariable a kopiert und mit Hilfe der Zeichenautomatik sofort dargestellt.	

Lösungshinweise zum Arbeitsblatt AB4

Dieses Arbeitsblatt steht am Ende beider methodischen Zugänge zum Feigenbaum-Diagramm. Die Untersuchungen beschränken sich sehr stark auf die Formulierung eigener Beobachtungen und soll Begriffe wie Chaos, Bifurkation und Selbstähnlichkeit erfahrbar machen.

Erweiterung zu Aufgabe 3:

Hier ist denkbar, daß das Größenverhältnis der selbstähnlichen Abschnitte bestimmt wird. Es ist durch die Feigenbaumzahl 4,669201... gegeben. Die gleiche Zahl läßt sich als Skalierung des Apfelmännchens bestimmen.

Zu Aufgabe 3:

Der Zusammenhang zwischen Apfelmännchen und Feigenbaum-Diagramm muß sicherlich im Unterrichtsgespräch geklärt werden. Hier ist nur daran gedacht die 'Einschnürungen' des Apfelmännchens und die Bifurkationszahlen oder die Größe beider Graphen zu vergleichen. Die Untersuchung des Feigenbaum-Diagrammes für $c > 0$ kann hier angeregt werden.

Um den Begriff der Selbstähnlichkeit als häufig auftretender Denkansatz aufzuzeigen, kann auf Kochkurven, Schneeflockenkurven oder auf das bekannte von B. Mandelbrot stammende Beispiel der Bestimmung der Form und Länge einer Küstenlinien hingewiesen werden.

Arbeitsblatt AB4 Untersuchung des Feigenbaum-Diagrammes

Aufgabe 1 a) Versuche das Feigenbaum-Diagramm mit eigenen Worten zu beschreiben! Eine Hilfe: Vergleiche die Bereiche $-1,2 < c < -0,8$ und $-1,4 < c < -1,2$ miteinander.

Die Figur des Diagrammes hat ähnlich ausschauende Bereiche. Man nennt diese Bereiche selbstähnlich.

b) Versuche mit Hilfe des Programmes möglichst genau die Zahlen c zu bestimmen, bei denen sich die Anzahl der Attraktoren verdoppelt. Man nennt diese Punkte Bifurkationspunkte.

Prüfe diese Aufspaltung noch einmal durch die Wahl von geeigneten Zahlen c nach und dokumentiere deine Beobachtung.

c) Wie sieht das Diagramm für $c < -1,4$ aus? Schau dir das Verhalten der Folge für $c = -1,5$ genauer an. Hier gibt es keine bestimmmbaren Attraktoren. Die Folgen verhalten sich für diese Konstanten c chaotisch.

Aufgabe 2: Diese Untersuchung kann man noch verfeinern.

a) Bestimme das Verhalten dieser Folge im Bereich $-1,45 < c < -1,40$ in einer Schrittweite von $-0,001$. Wähle selbst eine geeignete Skalierung der Achsen des Feigenbaum-Diagrammes.

b) Fertige einen Bildschirmausdruck. Du mußt vielleicht die Schrittweite noch anpassen, daß ein klares Diagramm entsteht. Vergleich mit dem ersten Feigenbaumdiagramm und beschreibe deine Beobachtung in Worten. Wähle die richtigen Begriffe!

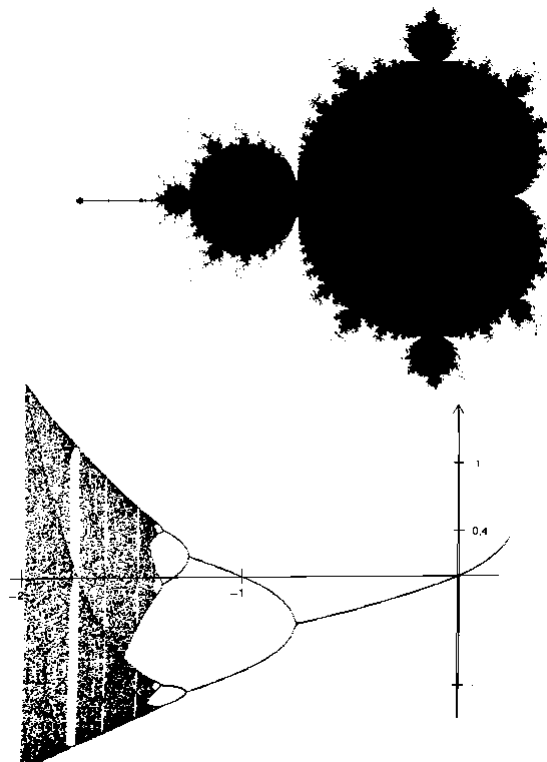
Aufgabe 3: Im Bild ist das Feigenbaum-Diagramm und das Apfelmännchen untereinander dargestellt.

Zeichne parallele Linien zur a -Achse zwischen dem Apfelmännchen und dem Feigenbaum-Diagramm.

Bei welchen Zahlen c schneiden diese Linien das Apfelmännchen?

a) Kannst du daraus schon ableiten, was beim Apfelmännchen aufgetragen ist? Überlege!

b) Ist das Apfelmännchen eine selbstähnliche Figur? Formuliere mit deinen eigenen Worten.



Arbeitsblatt B1 Zwei Funktionsgraphen schneiden sich

Es gibt zwei Möglichkeiten die Schnittpunkte zweier Kurven, die durch Funktionsgraphen bestimmt sind, zu bestimmen:

- Aufstellen der Gleichungen und Berechnen der Lösung,
- Entwicklung eines Näherungsverfahrens zur numerischen Berechnung.

Beginne mit der Untersuchung eines einfachen Beispiels, das dann immer mehr verallgemeinert wird.

Aufgabe 1: Betrachte die quadratische Funktion $f: x \rightarrow x^2 - 1; \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ (bzw. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) und die lineare Funktion $g: x \rightarrow x; \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$.

- Zeichne ein Koordinatensystem mit den Bereichen auf den Achsen $-4 < x < 4$ und $-4 < y < 5$ in dein Heft.
- Zeichne die Graphen G_f und G_g der oben gegebenen Funktionen in das Koordinatensystem ein.

Hinweis: Wenn du mit einem Funktionsplotter umgehen kannst, führe die Aufgabe damit durch.

- Trage nun einen Linienzug nach folgender Verfahren schrittweise ein:
 - Wähle auf der x -Achse den Startwert $x_1 = 1,5$.
 - Ziehe eine senkrechte Linie senkrecht bis zu G_f .
 - Zeichne eine waagrechte Linie bis zu G_g .
 - Fahre fort mit Anweisung (2).

Beschreibe den Linienzug, der sich aus dieser Anweisungsvorschrift ergibt.

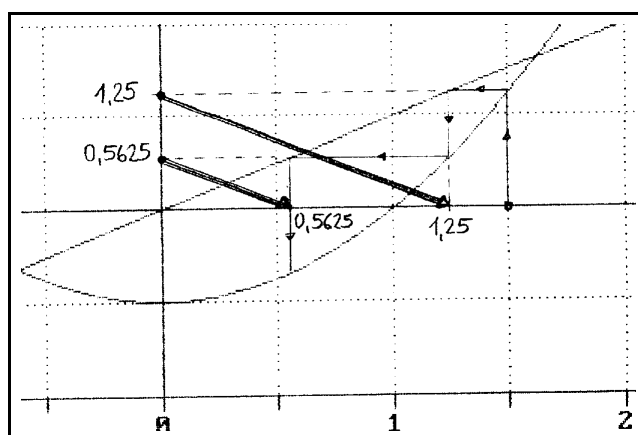
- Wähle nun verschiedene Startwerte für den Linienzug, z. B. 0,8, 0,5, -0,2 oder auch 1,7. Fertige eine Tabelle, die den Startwert und das Verhalten des Linienzuges enthält.
- Wähle als Startwert die x -Koordinate eines Schnittpunktes der beiden Graphen. Was passiert jetzt?

Um einfacher Startwerte ändern zu können, soll das Zeichnen von einer Tabellenkalkulation unterstützt werden. Gut einsetzen läßt sich wieder eine Programm, das die Tabelle und die Grafik nebeneinander zeigen kann, da dann Änderungen in der Tabelle sofort in der graphischen Darstellung beobachtet werden können. Zur Vorbereitung soll die folgende Aufgabe dienen.

Aufgabe 2: Betrachte nocheinmal die Anweisungen zur Erzeugung des Linienzuges. Verfolge in der Zeichnung in deinem Heft die aufeinanderfolgenden x - und y -Werte der Punkte auf den Graphen und trage diese nun zunächst in eine Tabelle mit den folgenden Spalten in deinem Heft ein:

 Zeilenzähler n
 Definitionsbereich x
 Wertebereich y

Die entsprechenden Koordinaten kannst du auf den Achsen ablesen. Für den Startwert $x = 1,5$ erhältst du z. B. (Abb.)



Arbeitsblatt B2 Berechnung der Schnittpunkte der Funktionsgraphen mit einer Tabellenkalkulation

Aufgabe 1:

- a) Lege ein Rechenblatt mit einer Spalte für die x -Werte und y -Werte $f(x)$ an. Die Anzahl der Zeilen setzt man groß genug an, etwa 200. Öffne das Graphikfenster. Für den Darstellungsbereich gilt $-2 < x < 2$ und $-2 < y < 5$. Erzeuge die Graphen der Funktion $f: x \mapsto x^2 - 1$ und $g: x \mapsto x$.
- b) Entwicklung der Formeln für jede Spalte:
Spalte der x -Werte: aus der Aufgabe 2 des Arbeitsblattes B1 folgt, daß man bei jedem Durchgang der Anweisungen den neuen x -Wert dadurch erhält, daß man ihn mit dem alten y -Wert gleichsetzt. Im Diagramm entspricht dies einem Vertauschen von y und x . Damit ergibt sich für die x -Spalte: $x = \#y$ in der Schreibweise von VIVITAB. Das Doppelkreuz bewirkt, daß das x mit dem y -Wert der vorangehenden Zeile gleichgesetzt wird. Spalte der y -Werte: Diese werden wie üblich aus den x -Werten nach der Funktionsvorschrift berechnet: hier: $y = x^2 - 1$. Trage die Formeln in die Tabelle ein.
- c) Schalte die Zeichenautomatik mit dem Eintrag (t) für eine Treppenkurve ein und trage den Startwert $x = 1,5$ in die erste Zeile der x -Spalte ein. Mit 'r' für Rechnen wird die Tabelle berechnet und dann in der Graphik die Treppenkurve erzeugt. Fertige einen Bildschirmausdruck und klebe diesen in dein Heft.

Aufgabe 2: Verfahre ebenso mit der Funktion $f_c(x)$, die zusätzlich von einem Parameter c abhängt: $f: x \mapsto x^2 + c$ mit c aus $\{-0,3; -1,3; -1,4; \dots\}$. Wähle dabei geeignete Startwerte für die Schnittpunktsbestimmung, daß der Linienzug sich auf einen Schnittpunkt zusammenzieht. Dein Protokoll soll folgendes in Tabellenform festhalten: c ; Startwert; Verhalten der Treppenkurve; Koordinaten der Schnittpunkte. Deine Aufmerksamkeit soll sich vor allem auf das Verhalten des Linienzuges richten. Unterscheide hier wichtige Fälle.

Aufgabe 3: Die Tabelle enthält die Koordinaten der Punkte, die den Linienzug festlegen. Setze wieder verschiedene c -Werte ein und ergänze die Tabelle durch die Zahlen, die am Ende der Tabelle stehen.

Diese Zahlen bekommen einen eigenen Namen. Man nennt sie Attraktoren der Folge von Zahlen, die in der x - bzw. y -Spalte stehen.

Die Folge ordnet dabei der Zeilennummer n aus \mathbb{N} einen Wert $x = a(n)$ zu:

$(a(n)): n \mapsto a(n), \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Q}$

Begriff des Attraktors: Gilt für großes n , daß schließlich $a(n)$ gegen eine Zahl a strebt, so heißt diese Zahl a ein Attraktor der Folge.

Die Zahlen der Folge entstehen dabei dadurch, daß die Zahl der vorangehenden Zeile, der Vorgänger nach der Funktionsvorschrift berechnet wird. Übertragen heißt dies: $a(n+1) = [a(n)]^2 + c$.

Zum Beispiel: Für die Funktion $f: x \mapsto x^2 - 1$ gilt $a(n+1) = [a(n)]^2 - 1$

Die Folge $(a(n))$ mit dem Bildungsgesetz $a(n+1) = [a(n)]^2 - 1$ zeigt, daß eine Folge mehrere Attraktoren haben kann. Die hier untersuchte Folge hat die Attraktoren -1 und 0 .

Aufgabe 4: Bestimme für $f_{1,3}(x) = x^2 - 1,3$ die Schnittpunkte mit $g(x)=x$. Entnimm der entstehenden Tabelle die zugeordnete Folge des Linienzuges und der Tabelle die Attraktoren.

Hinweise zum Aufgabenblatt B1:

Die Aufgaben zielen auf den sinnvollen Einsatz des Rechners ab, sind aber auch ohne diesen durchführbar, wenn man z. B. auf das Anfertigen der Funktionsgraphen mit einem entsprechenden Plotprogramm verzichtet. Wichtig ist, daß die Schüler bevor sie den Rechner zu Hilfe nehmen, das Erzeugen der Treppenkurve verstehen, um aus dieser die Folge auf der x - bzw. y -Achse entnehmen zu können. Das hier verwendete Programm VIVITAB erlaubt dann das rechnerunterstützte Vorgehen in übersichtlicher Weise.

Zu Aufgabe 1b):

Für diese Aufgabe eignet sich jedes gute Plotprogramm. Es soll natürlich auch damit erreicht werden, daß der Schüler sich an ein Koordinatensystem gewöhnt, das nicht mehr auf beiden Achsen die gleiche Skalierung aufweist. Er wird dadurch gezwungen, die Achsenbeschriftung genau zu lesen und die Werte durch sorgfältiges Ablesen von den dargestellten Achsen zu gewinnen.

Zu Aufgabe 1c):

Übertragung der Anweisungsfolge in ein Struktogramm bietet sich an. Elementare Strukturen eines Algorithmus Wiederholung (wiederhole bis..., solange tue bis...) können dabei zur Sprache kommen.

Zu Aufgabe 1d):

Der Startwert bestimmt das Verhalten der Linienzüge, ob sie sich auf einen Punkt 'spiralförmig zusammenziehen oder auseinanderlaufen'. Dabei ist bemerkenswert, daß für $x < 1,62$ der Linienzug immer gegen den linken Schnittpunkt der beiden Graphen läuft. Für Startwerte $x > 1,62$ gibt es keinen solchen Punkt. Die Schnittpunkte der Graphen haben also eine unterschiedliche Eigenschaft bezüglich der Eingrenzung des Verhaltens der Treppenkurve.

Für alle konvergenten Treppenkurven zeigt sich, daß diese schließlich zwischen den x -Werten -1 und 0 pendeln.

Zu Aufgabe 1e):

Startet man mit dem Linienzug genau im Schnittpunkt, so stimmen alle Punkte des Linienzuges überein.

Zu Aufgabe 2:

Der Schüler soll dem Diagramm entnehmen, daß zum Zeichnen des Linienzuges das Vertauschen des y -Wertes mit dem x -Wert erfolgen muß. Mit dieser Formulierung umgeht man den Begriff der Umkehrfunktion und vermeidet die Verwirrung, daß bei dieser Skalierung nicht an der Winkelhalbierenden des I.Quadranten gespiegelt wird.

Hinweise zum Aufgabebblatt B2:

In der hier vorliegenden Beschreibung wird auf die Möglichkeiten der Tabellenkalkulationen VIVITAB eingegangen.

9.2 Logistisches Wachstum und Chaos

9.2.1 Vorüberlegungen, Begriffsklärungen, Modell

Der Träger eines Wachstumsprozesses wird als Population bezeichnet. Dies kann die Bevölkerung eines Landes, eine Tierpopulation, eine Pilzkultur, aber auch eine wirtschaftliche Größe sein, wie ein Sparguthaben oder das Sozialprodukt. Die Größe der Population (Bestand) zum Zeitpunkt t wird mit B_t bezeichnet. Die Veränderung der Population beim Übergang vom Zeitpunkt t zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ wird durch die Größe $B_t = B_{t+\Delta t} - B_t$ beschrieben.

Eine Population kann sich in einem Zeitraum Δt ($t \rightarrow t + \Delta t$) durch **Geburten** G_t und **Sterbefälle** S_t verändern.

Die Grundgleichung eines jeden Wachstumsprozesses lautet somit:

$$B_{t+\Delta t} = B_t + G_t - S_t$$

Definiert man die auf die vorhandene Population bezogene **Geburten- bzw. Sterberate** durch

$$g_t = \frac{G_t}{B_t \Delta t} \text{ und } s_t = \frac{S_t}{B_t \Delta t},$$

so lautet die Grundgleichung mit diesen Beziehungen:

$$B_{t+\Delta t} = B_t + g_t \cdot \Delta t \cdot B_t - s_t \cdot \Delta t \cdot B_t \quad (1)$$

Die Voraussetzung konstanter Geburten- und Sterberaten und damit auch konstanter Zuwachsraten ist i. a. bei der Entwicklung einer Population nicht gegeben. Bei steigender Population kommt es durch endogene Faktoren (Fruchtbarkeit, Sterblichkeit, ...) und exogene (Nahrungsmittelknappheit, Raumangel, Streß, ...) zu einer Beeinflussung der Sterberate und damit der Zuwachsrate. Für die Erstellung eines

Modells nimmt man deshalb an, daß die Sterberate s_t proportional zur Population B_t sei:

$$s_t = s \cdot B_t$$

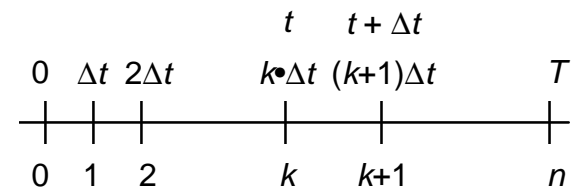
Im Zeitraum Δt ($t \rightarrow t + \Delta t$) ist die Zahl der Sterbefälle dann

$$S_t = s_t \cdot \Delta t \cdot B_t = s \cdot \Delta t \cdot B_t^2$$

Damit lautet die Grundgleichung des Wachstumsprozesses:

$$B_{t+\Delta t} = B_t + g \cdot \Delta t \cdot B_t - s \cdot \Delta t \cdot B_t^2 \text{ oder } B_{t+\Delta t} = (1 + g \cdot \Delta t) \cdot B_t - s \cdot \Delta t \cdot B_t^2 \quad (2)$$

Geht man vom Zeitpunkt t bzw. $t + \Delta t$ zur Nummer k bzw. $k+1$ des Zeitpunktes über, so sind Bestandsgrößen $B_{t+\Delta t}$ durch B_{k+1} und B_t durch B_k und die Raten $r_{t+\Delta t}$ durch r_k zu ersetzen.



Damit wird aus Gleichung (2):

$$B_{k+1} = (1 + g) \cdot B_k - s \cdot B_k^2 \quad (3)$$

Ein durch die Größengleichungen (2) oder (3) definierter Wachstumsprozess wird als logistisches Wachstum bezeichnet. (vgl. Dürr/Ziegenbalg, Mathematik für Computeranwendungen, Schöningh-Verlag, S. 193 - 203)

Betrachtet man das Problem formal mathematisch, so hat man es mit einer Differentialgleichung

$$\frac{db}{dt} = g \cdot b - s \cdot b^2$$

zu tun, die sich ohne Mühe integrieren läßt und eine Lösung ergibt, die für $t \rightarrow \infty$ stets die Asymptote $b = \frac{g}{s}$ besitzt.

Diese obere Schranke $\frac{g}{s}$ wird als **Umweltkapazität** für die Population bezeichnet.

9.2.2 Iterative Lösung des Wachstumsprozesses - Modell

Formt man Gleichung (2) um, die das logistische Wachstum beschreibt, so erhält man mit $x := B_t$:

$$x_{t+\Delta t} = (1 + g \cdot \Delta t) \cdot x - s \cdot \Delta t \cdot x^2$$

und mit $x_{t+1} = x_{neu} = x_{alt} + \Delta x$

$$x_{neu} = x_{alt} + (g \cdot x_{alt} - s \cdot x_{alt}^2) \cdot \Delta t$$

bzw. $x_{neu} = (1 + g \cdot \Delta t) \cdot x_{alt} - s \cdot \Delta t \cdot x_{alt}^2$

Der Funktionsterm bzw. die Iterationsvorschrift, die es zu untersuchen gilt, lautet:

$$f_t(x) = (1 + g \cdot \Delta t) \cdot x - s \cdot \Delta t \cdot x^2 \quad (4)$$

beziehungsweise

$$f_k(x) = (1 + g) \cdot x - s \cdot x^2 \quad (5)$$

mit $g = g_{t \cdot \Delta t}$ und $s = s_{t \cdot \Delta t}$. Zeichnet man den Graphen der Funktion $f_t(x)$ (5), so ergibt sich eine nach unten geöffnete Parabel mit den

Nullstellen $(0|0)$ und $(\frac{1+g \cdot \Delta t}{s \cdot \Delta t} | 0)$

und dem Scheitel $(\frac{1+g \cdot \Delta t}{2 \cdot s \cdot \Delta t} | \frac{1+g \cdot \Delta t}{4 \cdot s \cdot \Delta t})$.

Zur Vereinfachung wählt man das Zeitintervall $\Delta t = \frac{1}{s-g}$.

Durch diese Normierung wird das Intervall $[0; \frac{1+g \cdot \Delta t}{s \cdot \Delta t}]$ auf das Intervall $[0; 1]$ abgebildet.

$$f_t(x) = (1 + g \cdot \frac{1}{s-g}) \cdot x - s \cdot \frac{1}{s-g} \cdot x^2$$

$$f_t(x) = \frac{s}{s-g} \cdot (x - x_2) \quad (6)$$

Mit $a = \frac{s}{s-g}$ ergibt sich schließlich:

$$f_a(x) = a \cdot x \cdot (1 - x) \quad (7)$$

Damit ergibt sich die nach M. J. Feigenbaum benannte Abbildung.

Als Graph dieser Abbildung erhält man (analog zu oben) eine nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen $(0|0)$ und $(1|0)$ sowie dem Scheitel $(\frac{1}{2} | \frac{a}{4})$.

Obige Normierung kann dahingehend interpretiert werden, daß 1 die Maximalzahl von Individuen ist. Es ist

klar, daß nur Startwerte x_0 mit $0 < x_0 < 1$ sinnvoll sind.

In diesem Modell des logistischen Wachstums beschreibt x etwa die Populationsdichte einer Anzahl von Individuen. Man mißt x in regelmäßigen Abständen und erhält Meßwerte x_0, x_1, x_2, \dots . Die Dynamik des Systems ist durch die Abbildung f gegeben, d. h. zwischen den Meßwerten x_k besteht der Zusammenhang $x_{k+1} = f(x_k)$.

$x = 0$ bedeutet, daß kein Individuum existiert, und $f(0) = 0$, daß dabei nicht plötzlich ein Individuum entstehen kann. Die Dichte 1 bedeutet, daß die Population übersättigt ist, und wegen $f(1) = 0$ ausstirbt. Durch diese Bedingungen wird ein zu starkes Anwachsen der Population verhindert.

In Wirklichkeit wird die Populationsdichte von einer Vielzahl von Faktoren beeinflusst. Trotzdem ist es sinnvoll und lehrreich, dieses vereinfachte Modell zu untersuchen, da hier bereits die wesentlichen qualitativen Eigenschaften erfahren werden können.

Die Fälle $x_0 = 0$ und $x_0 = 1$ sind bereits beschrieben. Zu untersuchen ist also, welches Verhalten sich für $x_0 \in]0; 1[$ einstellt. Die Prozesse sind hochsensitiv bei festem Wert von x_0 und einer Änderung von α bzw. bei festem α und einer Änderung des Startwertes x_0 . Geringfügiges „Zittern“ von x_0 bzw. α bewirkt dramatische Veränderungen, wodurch der „Schmetterlingseffekt“ - geringste Ursache, größte Wirkung - in eindrucksvoller Weise veranschaulicht wird. Ausgehend von einem Startwert x_0 kann nun die Veränderung der Population anhand der Iterationsfunktionen (6) bzw. (7) in Abhängigkeit von den Parametern g und s bzw. α untersucht werden, wobei einem Wert x_{alt} durch die

Iterationsvorschrift f fortlaufend ein neuer Wert x_{neu} zugeordnet wird.

9.2.3 Mögliche Erarbeitung im Unterricht

Teilprobleme bzw. Teilaufgaben

Es ist nicht möglich, Begriffe wie Folge, Grenzwert, stabiles Gleichgewicht in der Realschule (S I) in mathematischer Strenge zu definieren und zu verwenden. Es ist aber durchaus „legal“, diese Begriffe propädeutisch und anschaulich einzuführen, ohne sie dabei fachlich zu verfälschen.

Folge: Folge von Zahlen, wobei die einzelnen Glieder nach einem bestimmten Bildungsgesetz berechnet werden; Beispiel:

$$x(n) = n^2 + 1 \quad (n \in \mathbb{N}_0) \text{ oder} \\ x_{n+1} = x_n^2 + 0,5 \quad (x_i \in \mathbb{R})$$

Grenzwert: Bestimmter Wert g , dem sich die Glieder $x(n)$ einer Folge mit wachsendem n immer mehr annähern (und zwar so, daß von einem bestimmten $x(n)$ ab die Differenz $|x(n) - g|$ kleiner als jede noch so kleine positive Zahl wird).

a) Iterative Darstellung von (exponentiellen) Wachstumsprozessen, z. B. anhand der Gleichung $f(x) = k \cdot x$ mit $k > 0$;

Beispiele sind Zinseszins, radioaktiver Zerfall, Verbreitung eines Gerüchts, einer (ansteckenden) Krankheit, sowie die Begriffe Iteration und Iterationsalgorithmus.

b) Hinführung zum Problem anhand einer konkreten Aufgabensituation; Erkenntnis, daß die Iterationsvorschrift $f(x) = k \cdot x$ zur Beschreibung der Entwicklung einer Population ungeeignet ist ($k > 1$: unbegrenztes Wachstum, $k < 1$: Aussterben);

Erarbeitung eines Modells für das logistische Wachstum und anschauliche Einführung der relevanten Begriffe (s. Abschnitt 9.2.1.) Formulierung der Grundgleichung für das logistische Wachstum in Form einer Iterationsvorschrift; Ziel: Gleichungen (3) (6) (7).

c) Abbildung des Modells im Rechner mit Hilfe eines geeigneten Werkzeugs (derive, MatheLab, Mathcad, ...); Grundsätzlich können die Untersuchungen auch „zu Fuß“ mit dem Taschenrechner durchgeführt werden, obgleich sie dann nicht mit der erforderlichen Schnelle und Vielfalt ausgeführt und bis zur notwendigen Iterationstiefe vorangetrieben werden können.

d) Untersuchungen von Wachstumsprozessen anhand der Gleichung

$$f(x) = (1 - g) \cdot x - s \cdot x^2$$

mit unterschiedlichen Anfangswerten x_0 sowie unterschiedlichen Belegungen der Parameter, Wachstumsrate g und Sterberate s . Wertetabelle und/oder graphische Darstellung können interpretiert werden (Gleichgewichtsfall, Umweltkapazität als Grenzwert). S. Kap. 9.2.5 Beispiele ($g = 0,08$, $s = 0,0001$, $x_0 = 20$).

Speziell: $0 \leq g < 2$ (Stabiler Gleichgewichtswert $k = g/s$) und $g > 2$ (Kein stabiler Gleichgewichtswert).

e) Untersuchung von Wachstumsprozessen anhand der Gleichung

$$f_\alpha = a \cdot x \cdot (1 - x)$$

für unterschiedliche Belegungen des Parameters α und für variable Anfangswerte x_0 ($0 < x_0 < 1$);

Wertetabelle und/oder graphische Darstellung sind zu erzeugen und zu interpretieren; zusätzlich wird der Iterationsprozess graphisch veranschaulicht (s. Kap. 9.2.5 Beispiele);

insbesondere können hierbei folgende Fragen bzw. Teilprobleme von Interesse sein:

- Verifikation der Aussagen (Vermutungen) für $x_0 = 0$ und $x_0 = 1$;
- $0 \leq a \leq 1$ (Feststellung: jede Folge konvergiert gegen 0);
- $1 \leq a \leq 3$ (Feststellung: jede Folge konvergiert gegen $1 - \frac{1}{a}$; aus dem bekannten Fixpunkt zweigt eine neue Bahn von Fixpunkten ab.
- Gibt es Startwerte, bei denen die Individuenzahl konstant bleibt ?

Diese Frage ist gleichbedeutend mit dem Problem, ob für die Abbildung f Fixpunkte existieren;

Für die nicht notwendig stabilen Gleichgewichtswerte bzw. Fixpunkte gilt:

$x_{fix} \in [0;1]$ ist Fixpunkt von f , wenn $f(x_{fix}) = x_{fix}$.

Die Gleichungen (6) und (7) liefern neben dem trivialen Fall $x_{fix} = 0$,

$$x_{fix} = \frac{a-1}{a} = \frac{g}{s} = k.$$

Ein Fixpunkt $x_{fix} \in [0;1]$ heißt stabil, wenn es ein offenes Intervall J von $[0;1]$ mit $x_{fix} \in J$ gibt, so daß für jeden Startwert x_0 die Folge der x_k gegen x_{fix} konvergiert. Der Begriff stabiler Fixpunkt bzw. stabiles Gleichgewicht läßt sich so interpretieren, daß sich, ausgehend von einem Startwert x_0 , das System nach einiger Zeit auf den Fixpunkt x_{fix} einpendelt; wird dieses Gleichgewicht durch äußere Einflüsse gestört, so kehrt das System wieder in den ursprünglichen Zustand zurück, falls die Störung nicht zu groß war; (s. dazu P. Dormayer, Chaos bei der Feigenbaumabbildung $f(x) = 4x(1-x)$ in

Didaktik der Mathematik, Heft 3, 1991, S.207).

- Gibt es Belegungen für α , so daß, unabhängig vom Startwert x_0 , die Iteration auf einen Gleichgewichtswert (Fixpunkt) hinläuft? ($\alpha = 2!$)
- Interessant ist auch die Untersuchung über die Abhängigkeit der Anzahl von Fixpunkten von der Belegung von α . Es zeigt sich, daß es mit wachsendem α zu einer deutlichen Verdoppelung der Anzahl der Grenzwerte (Fixpunkte, Attraktoren) kommt. Die Fixpunkte spalten sich auf (Heugabeleffekt, Bifurkation, Verzweigungsbaum). Bei einem kritischen Wert $\alpha = 3,5699\dots$ wird die Angelegenheit dramatisch. Hier beginnt das Chaos; die x_n -Werte springen völlig regellos (aperiodisch) umher, Aussagen über Grenzwerte sind nicht mehr möglich. $\alpha > \alpha_\infty$ stellt den Übergang von der Ordnung zum Chaos dar.

Anknüpfungspunkte im Lehrplan

Direkte Anknüpfungspunkte gibt es für diese Thematik im Mathematiklehrplan der Realschule (S I) nicht. Dieser Themenbereich ist aber durchaus im Rahmen einer experimentellen Mathematik als Erweiterung und Vertiefung des Lernzielkomplexes „Exponential-Funktionen“ denkbar, zumal die Behandlung dieser Probleme äußerst reizvoll und motivierend ist sowie wegen seiner Bedeutung und Aktualität in einem modernen Mathematikunterricht ihren Platz finden sollte.

Voraussetzungen:

Zuordnungsbegriff, Funktionsbegriff
Umgang mit Wertetabellen und Diagrammen
Fähigkeit, tabellarische und

graphische Darstellungen von Relationen und Funktionen interpretieren zu können
 Sicherer Umgang mit einem Werkzeug

Zeitbedarf: Minimum 4 Stunden; je nachdem, wieviele der vorstehenden Teilprobleme behandelt werden sollen und wie tief diese jeweils ausgelotet werden möchten, wird sich die erforderliche Stundenzahl erhöhen.

9.2.4 Anmerkungen zur Software

Die unter 9.2.5 angefügten Beispiele bzw. Bildschirmausdrucke sind mit dem Programm derive (Version 2) erstellt, sind aber, was Iterationsprozeß und Graphik anbelangen, auch mit einem anderen Werkzeug, z. B. Vivitab, nachzuvollziehen. Das Programm derive erklärt sich über eine Menüführung weitgehend von selbst. Wesentlich ist, daß Optionen integriert sind, die es erlauben, Rechengenauigkeit, Rechenmodus, die Art der graphischen Darstellungen usw. einzustellen. So ist z. B. anzuraten, im Menüpunkt „Options Precision“ den Approximate-Modus einzustellen, weil sonst u. U. wegen des bei Iterationsprozessen benötigten großen Speicherbedarfs die Kapazität des Arbeitsspeichers nicht mehr ausreicht.

Auf vier Anweisungen sei noch speziell eingegangen:

- $vector(f, x, u, o)$ generiert einen Vektor, dessen Elemente von dem Ausdruck f gebildet werden, wenn für die Variable x der Reihe nach die natürlichen Zahlen von u bis o genommen werden. Beispiel:
 $vector(x^2, x, 1, 5) \longrightarrow [1, 4, 9, 16, 25]$
- $element(v, n)$ liefert das n -te Element des Vektors v
 Beispiel: $element([a \ b \ c], 2) \longrightarrow b$

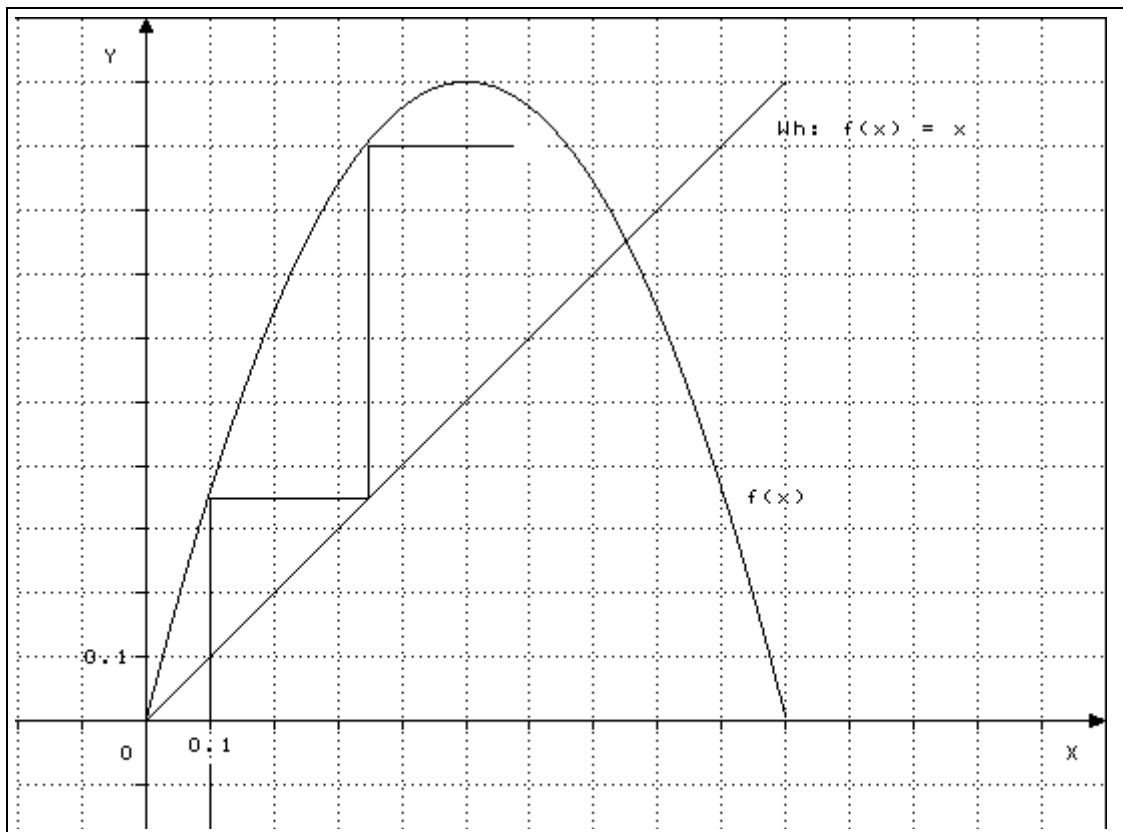
- $iterates(f, x, x_0, n)$ generiert einen Iterationsprozeß mit der Iterationsvorschrift f , der Iterationsvariablen x , dem Startwert x_0 und der Iterationstiefe n ; als Ergebnis erhält man einen Vektor mit x_0 als erstem Element.
- $bild$ bereitet als benutzerdefinierte Funktion die Iterationsergebnisse für das Plotten in geeigneter Weise auf; nach Anwendung des Befehls „Simplify“ auf die Funktion $bild$ ergibt sich eine Bildmatrix, deren Elemente Vektoren der Gestalt $[k, f(x_k)]$ sind; mit dem Befehl „Plot“ können die Elemente der Bildmatrix als Punkte in ein Diagramm eingetragen werden.

9.2.5 Beispiele und Bildschirmausdrucke

$$f_a(x) := a \cdot x \cdot (1 - x)$$

- $0 \leq a \leq 1$: Population stirbt aus.
- $0 \leq a \leq 3,28$ (a_1): Eindeutiger Gleichgewichtszustand; bei a_1 spaltet der Prozeß auf und es ergibt sich eine stabile Oszillation der Periode 2.
- $a_2 \approx 3,5$: Jeder Zweig spaltet erneut auf; Periode 4; die Aufspaltungen, gemessen an den Werten für a , werden immer häufiger.
- $a \approx 3,57$: Das Chaos tritt ein, d. h. alle Perioden werden instabil.

α	Anzahl der Attraktoren	Attraktoren (jeweils mit $x_0 = 0,600$)			
0,80		0			
1,00		0			
2,00	1	0,500			
2,80	1	0,642			
3,00	2	0,644	0,687		
3,14	2	0,538	0,780		
3,50	4	0,382	0,500	0,826	0,874
3,56	8	0,348	0,373	0,494	0,550
		0,808	0,833	0,880	0,889



Gehe vom Abszissenwert senkrecht zum Graph

→ Ordinatenswert

Gehe von diesem Punkt waagrecht zur Winkelhalbierenden

→ Ordinatenswert wird Abszissenwert

Gehe von diesem Punkt der Winkelhalbierenden senkrecht zum Graph

→ nächster Ordinatenswert

Setze das Verfahren fort

Bild 9.2.1

1: "Darstellung mit Derive"

2: $f(x, g, s, \delta t) := (1 + g \delta t) x - s \delta t x^2$

3:
$$\delta \tau(g, s) := \frac{1}{s - g}$$

4:
$$f(x, g, s) := \frac{s}{s - g} x (1 - x)$$

5:
$$\alpha := \frac{s}{s - g}$$

6: " _____ "

7: $f(\alpha, x) := \alpha x (1 - x)$

8: " _____ "

9:
$$x_{fix} := \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

10:
$$\text{kapazität} := \frac{g}{s}$$

1: $f(g, s, x) := (1 + g) x - s x^2$
 2: $\text{xfix}(g, s) := \left| \frac{(s - g)}{(s - g)} - 1 \right| / \frac{s}{s - g}$
 3: "
 4: "Beispiel: $g = 0.08$ $s = 0.0001$ $x_0 = 50$ $n = 150$ "
 5: $\text{xfix}(0.08, 0.0001)$
 6: 800

Bild 9.2.2

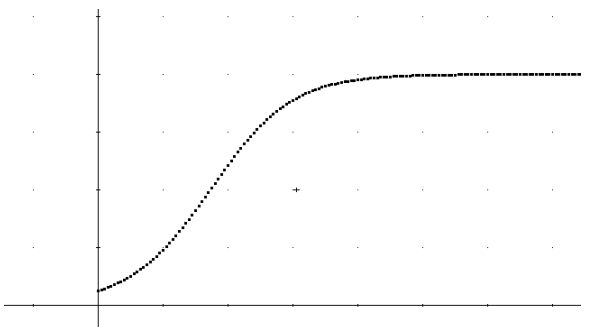


Bild 9.2.3

COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window
 Zoom
 Enter option
 Cross x:61.1111 y:400 Scale x:20 y:200 Derive 2D-plot

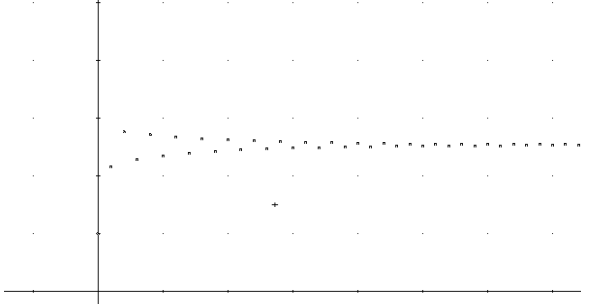


Bild 9.2.4

COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window
 Zoom
 Enter option
 Cross x:13.6111 y:15 Scale x:5 y:10 Derive 2D-plot

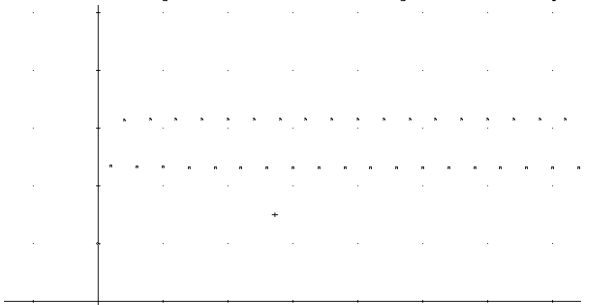


Bild 9.2.5

COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window
 Zoom
 Enter option
 Cross x:13.6111 y:15 Scale x:5 y:10 Derive 2D-plot

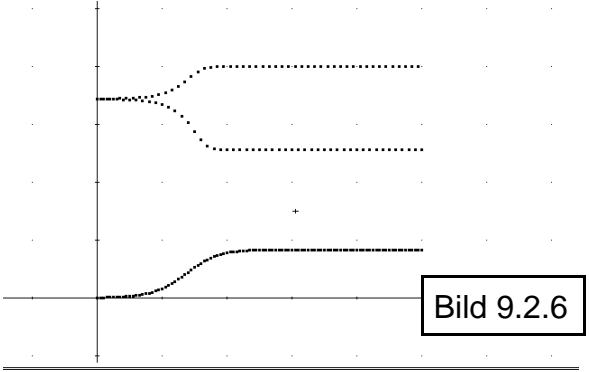
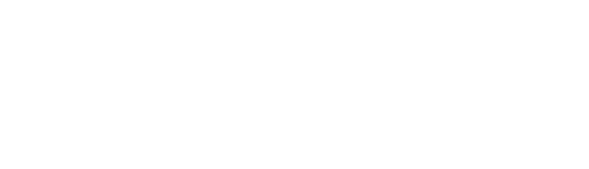


Bild 9.2.6

COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window
 Zoom
 Enter option
 Cross x:61.1111 y:0.3 Scale x:20 y:0.2 Derive 2D-plot

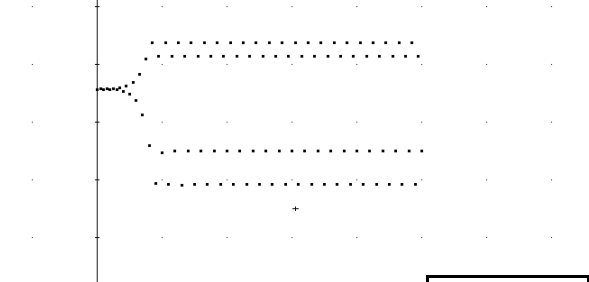


Bild 9.2.7

COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window
 Zoom
 Enter option
 Cross x:61.1111 y:0.3 Scale x:20 y:0.2 Derive 2D-plot

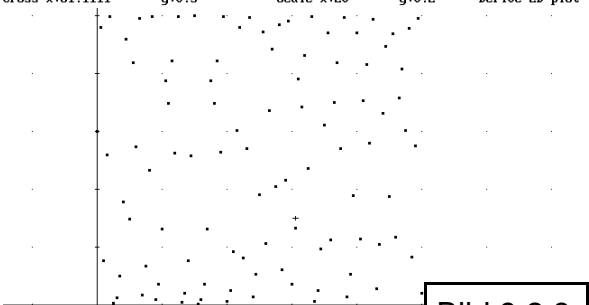


Bild 9.2.8

COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window
 Zoom
 Enter option
 Cross x:61.1111 y:0.3 Scale x:20 y:0.2 Derive 2D-plot

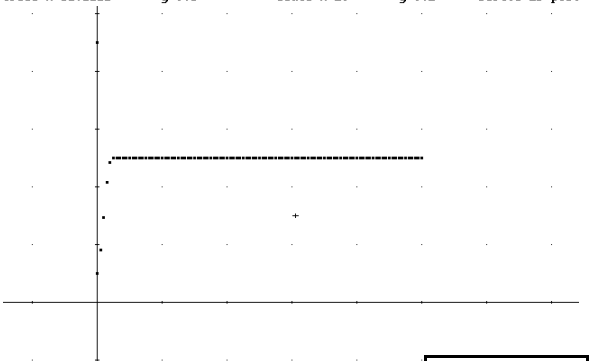
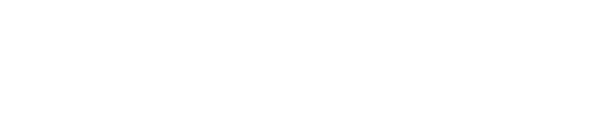


Bild 9.2.9

COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window
 Zoom
 Enter option
 Cross x:61.1111 y:0.3 Scale x:20 y:0.2 Derive 2D-plot



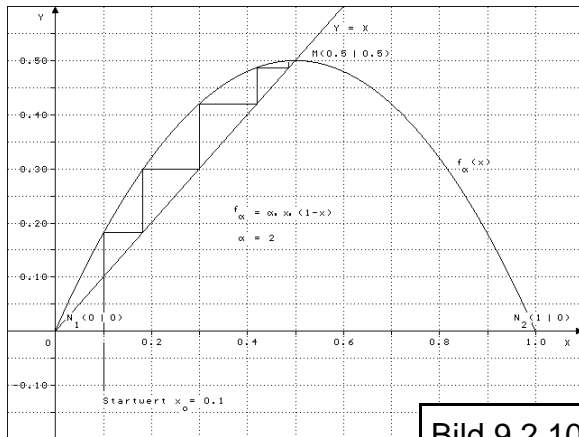
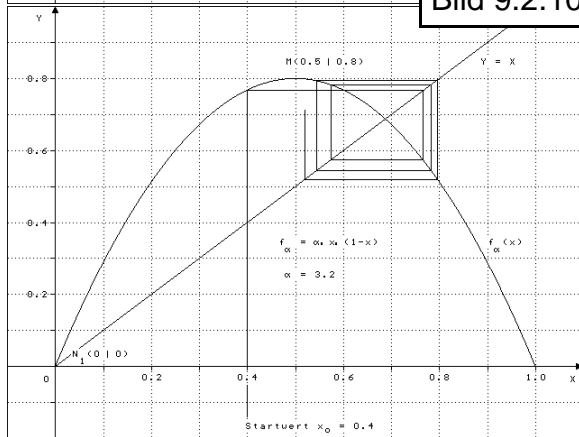


Bild 9.2.10



9.3 Selbstähnlichkeit fraktaler Gebilde am Beispiel der Koch-Kurve (Koch-Insel).

Ausgehend von einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge l_0 , wird jede Seite gedrittelt und über dem mittleren Drittel wieder ein gleichseitiges Dreieck errichtet. Mit den so entstandenen vier (pro Dreiecksseite) gleich langen Teilstrecken verfährt man ebenso wie mit der Ausgangsstrecke, so daß durch eine Art Iteration ein schneeflockenartiges Gebilde (Schneeflockenkurve), die Koch-Kurve entsteht.

Diese Koch-Kurve besitzt einige interessante Eigenschaften:

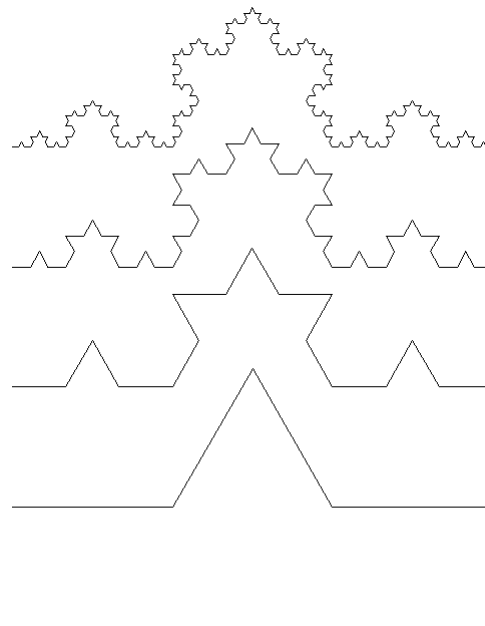
1. Ihr Umfang ist unendlich lang.
2. Der Inhalt hat einen endlichen Wert.
3. Sie ist selbstähnlich (skaleninvariant).

Diese Besonderheiten können in der Realschule (S I) durchaus im Rahmen einer experimentellen Mathematik Gegenstand des Unterrichts sein, wobei der Lehrplanbezug mit den Themen exponentielle Abhängigkeiten, Exponentialfunktionen, Ähnlichkeitslehre gegeben ist. Darüberhinaus bietet die Betrachtung dieser Koch-Kurven ein Beispiel für die Darstellung mathematischer Methoden, das Unhandliche (sprich Unendliche) in den Griff zu bekommen.

Bei der Behandlung im Unterricht wird man zunächst für die „Vervielfältigungen“ $k = 0; 1; 2; 3$ jeweils Umfang und Inhalt explizit bestimmen, um dann daraus die Gesetzmäßigkeit für den allgemeinen Fall zu entdecken bzw. abzuleiten.

9.3.1 Umfang

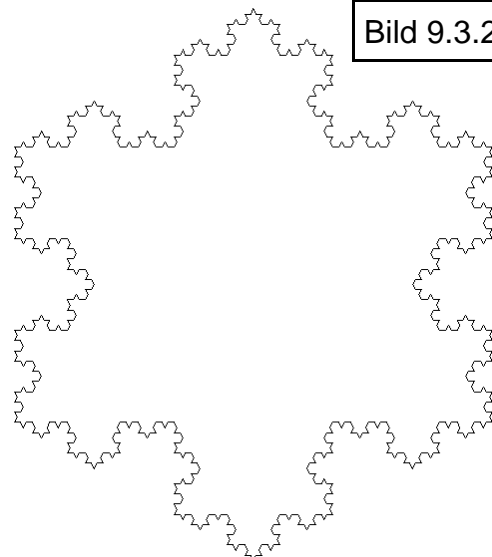
Bild 9.3.1



Es ist: $u = \lim_{k \rightarrow \infty} u(k) = 3 \cdot l_0 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k = \infty$.

Daß der Umfang der Koch-Kurve für $k \rightarrow \infty$ über alle Grenzen wächst, d. h. gegen Unendlich geht, kann anhand der Eigenschaften der Exponentialfunktionen $y = ca^x$ mit $a > 1$ (zusätzliche

Bild 9.3.2



Veranschaulichung durch Zeichnen und Interpretation des Graphen) einsichtig gemacht und begründet werden.

Vervielfältigung k	Länge der Teilstücke	Anzahl der Teilstücke	Umfang der Koch-Figur $u(k)$	experimentell mit einem entsprechenden Programm (z. B. derive) untersucht werden.
0	l_0	3·1	$3 \cdot 1 \cdot l_0$	
1	$\frac{l_0}{3}$	3·4	$3 \cdot 4 \cdot \frac{l_0}{3}$	
2	$\frac{l_0}{9}$	3·16	$3 \cdot 16 \cdot \frac{l_0}{9}$	
3	$\frac{l_0}{27}$	3·64	$3 \cdot 64 \cdot \frac{l_0}{27}$	
:	:	:	:	
k	$\frac{l_0}{3^k}$	$3 \cdot 4^k$	$3 \cdot 4^k \cdot \frac{l_0}{3^k}$	
			↓	
			$u(k) = 3 \cdot l_0 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^k \quad (k \in \mathbb{N}_0)$	

9.3.2 Inhalt

Es ist : $A(k) = l_0^2 \cdot \left[1 + \frac{3}{4} \cdot \sum_{i=1}^k \left(\frac{4}{9}\right)^i \right]$

mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \left(\frac{4}{9}\right)^i = \frac{4}{5}$

wird $A = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{3} \cdot l_0^2 = \frac{8}{5} \cdot A_0$.

Daß der Klammerterm für sehr große Werte von k ($k \rightarrow \infty$) gegen 0,8 strebt, und damit der Inhalt der Koch-Figur einen endlichen Wert (exakt das 1,6-fache des Ausgangsdreiecks), kann

9.3.3 Selbstähnlichkeit

Verkleinert man den durch die Punkte A und B begrenzten Kurventeil im Maßstab 1:3, so entsteht gerade der durch die Punkte A und B' begrenzte Teil. Dieser Teil der Kurve ist ähnlich zur Gesamtkurve: Selbstähnlichkeit. Stellt man also eine solche Kurve in einem anderen Maßstab dar, so ergibt sich dasselbe Bild. Die üblichen geometrischen Figuren besitzen diese Eigenschaft

Vervielfältigung k	Inhalt der kleinen Dreiecke	Anzahl der kleinen Dreiecke	Inhalt der Koch-Figur $A(k)$
0	0	0	$l_0^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$
1	$\frac{\sqrt{3}}{36} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9}$	$3 \cdot 1 = 3 \cdot 4^0$	$l_0^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left[1 + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right) \right]$
2	$\frac{\sqrt{3}}{324} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{81}$	$3 \cdot 4 = 3 \cdot 4^1$	$l_0^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left[1 + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9} + \frac{16}{81}\right) \right]$
3	$\frac{\sqrt{3}}{2916} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{729}$	$3 \cdot 16 = 3 \cdot 4^2$	$l_0^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left[1 + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9} + \frac{16}{81} + \frac{64}{729}\right) \right]$
:	:	:	↓
k	$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9^k}$	$3 \cdot 4^k$	$l_0^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left[1 + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9} + \frac{16}{81} + \frac{64}{729} + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^k\right) \right] \quad (k \in \mathbb{N})$

Klammerterm strebt gegen $\frac{4}{5}$

nicht. So kann man beispielsweise in nachfolgender Abbildung die Gesamtfigur so verkleinern, daß das Dreieck ABC auf das Dreieck DBE abgebildet wird (zentrische Streckung); die verkleinerte Gesamtfigur ist jedoch nicht identisch mit dem Dreieck DBE , da die Gesamtfigur die Strecke $[DE]$ enthält, die im Dreieck DBE nicht auftritt. An diesem Beispiel kann dem Schüler der Unterschied zwischen ähnlichen Figuren (geometrische Figuren, die durch eine Ähnlichkeitsabbildung aufeinander abgebildet werden können) und geometrischen Figuren mit der Eigenschaft der Selbstähnlichkeit (beliebig kleine Teile einer Figur sind der Gesamtfigur ähnlich, unterscheiden sich von dieser also nur in der Größe) deutlich gemacht werden.

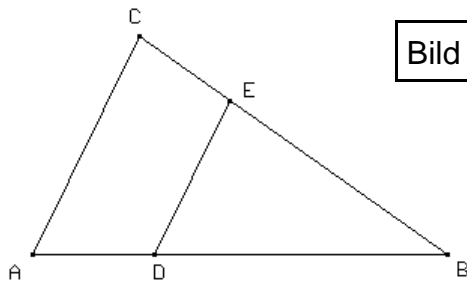


Bild 9.3.3

#1: "Inhalt des Ausgangsdreiecks:"

#2: $a_0 = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{4}$

#3: "_____"

#4: "Inhalt der Koch-Figur:"

#5: $A(k) := \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \sum_{i=1}^k \left(\frac{4}{9} \right)^i \right)$

#6: "_____"

#7: "Untersuchung des Summenterms:"

#8: $\sum_{i=1}^k \left(\frac{4}{9} \right)^i$

#9: $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9} \right)^i$

#10: 0

#11: $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9} \right)^i$

#12: 0.444444

#13: $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9} \right)^i$

#14: 0.641975

#15: $\sum_{i=1}^3 \left(\frac{4}{9} \right)^i$

#16: 0.729766

#17: $\sum_{i=1}^5 \left(\frac{4}{9} \right)^i$

#18: 0.786126

#19: $\sum_{i=1}^{10} \left(\frac{4}{9} \right)^i$

#20: 0.799759

#21: $\sum_{i=1}^{50} \left(\frac{4}{9} \right)^i$

#22: 0.799999

#23: $\sum_{i=1}^{100} \left(\frac{4}{9} \right)^i$

#24: 0.799999

#25: $\sum_{i=1}^{1000} \left(\frac{4}{9} \right)^i$

#26: 0.799999

#24: 0.799999

#25: $\sum_{i=1}^{10000} \left(\frac{4}{9} \right)^i$

#26: 0.799999

#27: "_____"

#28: $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \left(\frac{4}{9} \right)^i$

#29: 0.8

#30: "_____"

#31: $a := \frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 + \frac{3}{4} \cdot 0.8 \right)$

#32: $q := \frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 + \frac{3}{4} \cdot 0.8 \right)$

#32: $q := \frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

#33: 1.6

#34: "a = 1.6 ù a₀"

Bild 9.3.5

9.3.4 Zusätzliche Aufgaben und Übungen:

1. Statt gleichseitiger Dreiecke werden über den mittleren Teilstrecken jeweils Quadrate gezeichnet.
2. Ausgangsfigur ist ein reguläres Sechseck mit der Seitenlänge $l_0 = 1$ LE.

3. Nachweis der Selbstähnlichkeit am

a) Quadrat ($\rightarrow \sqrt{2}$)

b) Pentagramm ($\rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}$)

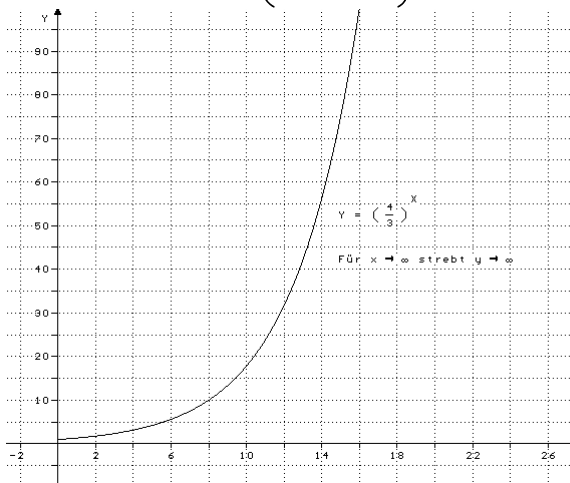


Bild 9.3.6

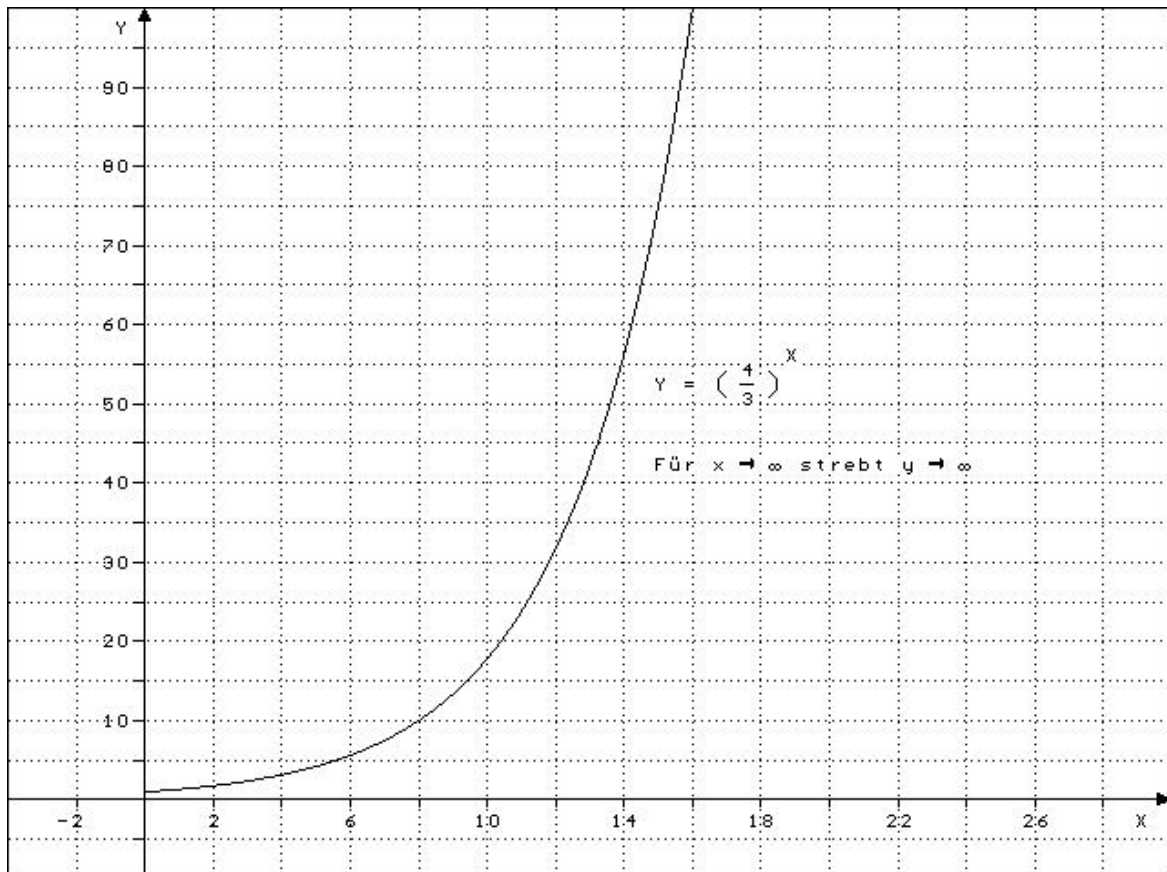


Bild 9.3.7

9.4 Selbstähnliche Figuren mit Turtle-Graphik

Aufbauend auf den Beitrag über die Erzeugung von geometrischen Figuren mit Turtle-Graphik sollen Figuren behandelt werden, die durch einen rekursiven Aufruf einer Prozedur erzeugt werden. Der neue Aspekt ist, daß diese Kurven nicht vollständig, sondern nur bis zu einem Grad dargestellt werden können, der durch die Bildschirmauflösung bestimmt wird. Das Prinzip des Aufbaues dieser Kurven ist in jedem beliebig kleinen Ausschnitt der Kurve enthalten. Es hat sich herausgestellt, daß auch ohne Rechneinsatz derartige Kurven schon in der Unterstufe gezeichnet werden können.

Lehrplanbezug: Regelmäßige Dreiecke, Vierecke und Vielecke ab 7. Jahrgangsstufe, Kurvenlänge

Zeitbedarf: 2 Unterrichtsstunden

Voraussetzungen: Umgang mit dem einfachen Editor in TURBO-PASCAL oder in COMAL

Mathematik: Koordinatensysteme, Innen- und Außenwinkelsätze, Doppelkreuzung

Informatik: Programmcode -> Compiler -> Programm, EVA-Prinzip (siehe ITG)

Programm: Turbo-Pascal und TP Graf, Kühlewind - Befehlsweiterung zur einfachen Grafikprogrammierung in Turbo-Pascal 4.0/ 5.0/ 5.5 (Zentralstelle) oder COMAL

Literatur:

Fractals for the Classroom: Strategic Activities Volume One, Peitgen, Jürgen

Saupe, Maletsky, Perciante, Yunker, New York 1991, Springer-Verlag

Informatik-Fachberichte 220, F. Stetter, W. Brauer, Heidelberg 1987, Vortrag: D. Stobbe, Einführung rekursiver Denkschemata zur Problembeschreibung und -lösung am Beispiel einer Robotersimulation

BUS Thema: Informatik-Themen im Grundkurs Mathematik S II, Zentralstelle für Computer im Unterricht, S. 82 - 91, München 1988

Baumann, Rekursion: Beispiele aus der Grafik, München 1987

TP Graf - Befehlsweiterung zur einfachen Grafikprogrammierung in Turbo Pascal, G. Kühlewind, Zentralstelle für Computer im Unterricht, Augsburg 1990

Mathematik mit Comal-Grafik, Reinhard Mauve, Bonn 1989

9.4.1 Vorbereitende Übungen

9.4.1.1 Zeichenpapier

Es zeigt sich, daß, um von dem so anderen Erzeugungskonzept fraktaler Kurven eine gute Vorstellung zu vermitteln, das Zeichnen dieser Kurven zunächst per Hand gut geeignet ist. Ein Schüler sieht sehr schnell die Grenzen seiner Zeichenmöglichkeiten und wird vorschlagen, für die sich immer wiederholenden Handlungsabläufe den Rechner einzusetzen.

Erleichtert wird das Zeichnen per Hand durch die Wahl von geeigneten gemusterten Papiervorlagen.

Zwei Arten sollen hier verwendet werden:

- i) kariertes Papier - 'Einheitszelle' ist ein Quadrat für rechtwinklige Kurvenstrukturen
- ii) rautiertes Papier - 'Einheitszelle' ist eine Raute für schiefwinklige Kurvenstrukturen

9.4.1.2 Programmgerüst

Wie schon bei den Beispielen zu einfachen geometrischen Figuren sollen Programmteile in ein Programmgerüst eingetragen werden, das die Steuerung des Bildschirmaufbaus und die Variablenumgebung im Programm unterstützt. Die Anweisungen der Turtle-Graphik werden von der Programmbibliothek TPGräf von Günther Kühlewind bereitgestellt. Das Rahmenprogramm hat in etwa folgenden Aufbau:

```
PROGRAM programmname;
uses TPGräf {G.Kühlewind, Gymnasium
Berchtesgaden, 30.05.90}

BEGIN {Hauptprogramm}

    GrafikEin;
    DefKartWelt(-0.6,-0.6,14,NOT
mittig);
    Raster(0.5, 0.5);
    Achsen('x', 'y');
    gotoxy(6,25); write('Taste
drücken !');

    warten;
    GrafikAus;
END.
```

9.4.1.3 Alltagsprobleme rekursiv beschrieben

Einige Beispiele, die zeigen, daß vertraute Strukturen und Prozesse aus dem Alltag mit Hilfe von Rekursionen beschrieben werden können. Geeignet sind solche Vergleich in höheren Jahrgangsstufen, um die Schwierigkeiten beim Erfassen rekursiver Strukturen aufzuzeigen.

Struktur eines Verkehrsstaus auf einer Straße:

$$\text{Stau} = \begin{cases} () \text{ d. h. leer, falls kein Auto steht} \\ (\text{Auto}, \text{Stau}), \text{ sonst} \end{cases}$$

Sprachliche Formulierung:

Ein Stau besteht, falls er vorhanden ist, also nicht leer ist, aus einem Auto, hinter dem sich eine Stau bildet.

Das Auflösen des Staus schreibt sich rekursiv folgendermaßen:

$$\text{Stau auflösen} = \begin{cases} (), \text{ keine Aktion, falls kein Stau vorhanden ist} \\ (\text{Auto fährt an, Stau auflösen}), \text{ sonst} \end{cases}$$

Sprachliche Formulierung:

Ein Stau wird aus der Sicht des letzten Fahrzeuges so aufgelöst, daß das vordere Auto anfährt und 'Stauauflösen' wieder angewandt wird.

Ebenso läßt sich eine Treppe als (Stufe, Treppe) auffassen und der Prozeß des Treppensteigens zerlegen in den rekursiven Aufruf (Stufesteigen, Treppensteigen):

$$\text{Treppe} = \begin{cases} () \text{ leer, falls keine Stufe vorhanden} \\ (\text{Stufe}, \text{Treppe}), \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\text{Treppensteigen} = \begin{cases} () \text{ keine Aktion, falls keine Stufe da ist} \\ (\text{Stufe steigen, Treppensteigen}), \text{ sonst} \end{cases}$$

9.4.2 Kochkurven, Schneeflockenkurve

9.4.2.1 Kochkurven

Der Aufbau der selbstähnlichen Figuren erfolgt immer nach dem gleichen Prinzip:

- Es gibt eine Startfigur, den sogenannten Initiator -> Stufe 0.
- Es gibt eine Figur, die zeigt, wie daraus die Form der Kurve gewonnen wird, den sogenannten Generator -> Stufe 1.

Festlegen des Initiators

Wiederhole

Anwendung des Generators auf
die Stufe 0

Anwendung des Generators
Stufe 1

Anwendung des Generators
Stufe 2

.....

Anwendung des Generators
Stufe n

bis die n-te Zeichenstufe erreicht ist.

Der rekursive Aufbau stellt sich etwa so dar:

Kurve zeichnen = {
 () kein Initiator
vorhanden

 (Generator anwenden,
Kurve zeichnen), sonst
 }

Zeichnen der Kochkurve

Zeichnen auf rautiertem Papier; Punkteraster unter 60° bzw. 120° - Winkeln.

Initiator: Strecke der Länge 18 LE
(Länge des Initiators sollte durch drei teilbar sein)

Generator - sprachliche Formulierung:
1. Teile die Strecke in drei gleiche Abschnitte

2. Zeichne über dem mittleren Abschnitt ein gleichseitiges Dreieck

Der Generator wird nun auf jede neu entstandene Strecke angewandt.

Umsetzen des Generators in eine Programmprozedur:

```
PROCEDURE Dritteln(Grad:integer; L
: real);
BEGIN
  IF keypressed THEN IF readkey=ESC
THEN Abbruch:=true;
  IF Abbruch THEN exit;
  IF Grad>0 THEN BEGIN
    Dritteln(Grad-1, L/3);
    TurnLeft ( 60);
    Dritteln(Grad-1,L/3);
    TurnRight(120);
    Dritteln(Grad-1,L/3);
    TurnLeft ( 60);
    Dritteln(Grad-1,L/3);
  END
  ELSE ForWd(L)
END;
```

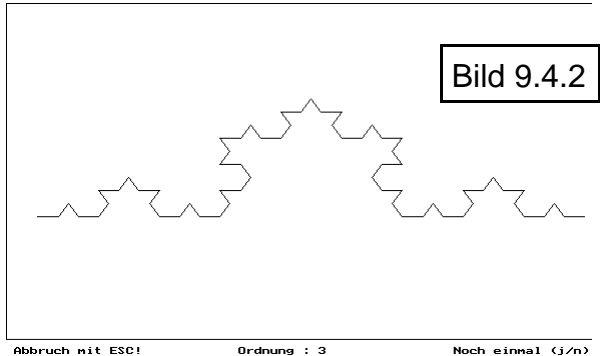
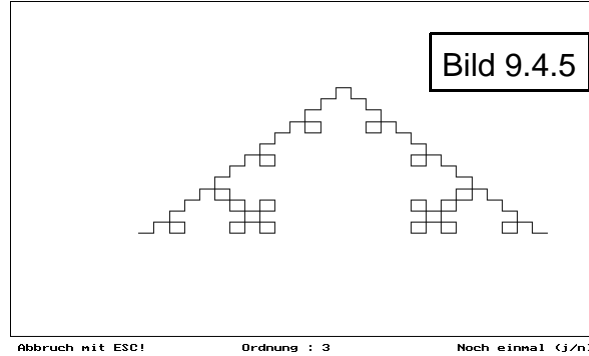
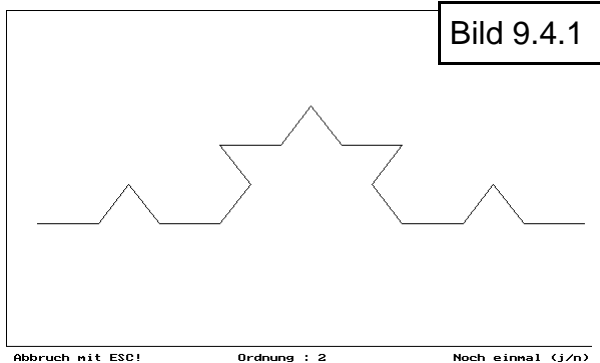
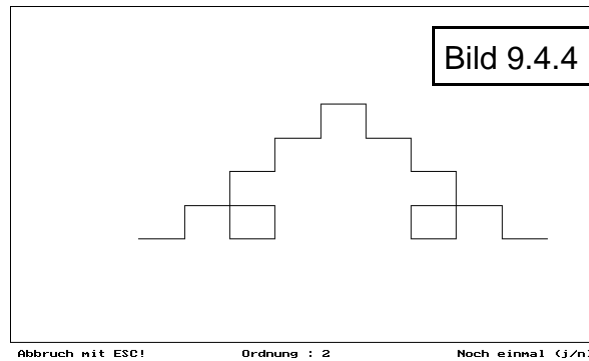
Die in Kleinschrift dargestellten Anweisungen dienen nur zum Abbruch des Programms und können auch entfallen. Der Prozedurkopf sollte bereits vorbereitet sein, so daß die Schüler nur die Turtle-Anweisungen ergänzen müssen.

Im Hauptprogramm erfolgt der Aufruf dieser Prozedur durch die hervorgehobene Programmzeile:

```
BEGIN { des Hauptprogramms }
  InitGraph;
  DefCartWorld(-0.5, -0.7, 12, NOT
centered);
  gotoxy(2,25); write('Abbruch mit
ESC!');
  REPEAT
    DefWindow(0, 1/24, 1, 1, Borde-
rOn, clipOn);
    clrscr; Abbruch:=false;
    DefMaxWindow;
    gotoxy(30,25); write('Ordnung :
'); ReadInt(Ordnung,1);
    DefWindow(0, 1/24, 1, 1, Borde-
rOn, clipOn);
    SetPosition(2,2);
    SetHeading(0);
```

```
Dritteln(Ordnung,Grundseite);

DefMaxWindow;
REPEAT
  gotoxy(57,25); write('Noch
einmal (j/n) ? ');
  ReadStr(jn,1)
  UNTIL upcase(jn[1]) IN ['J',
'N'];
  UNTIL upcase(jn[1])='N';
  closeGraph
END.
```

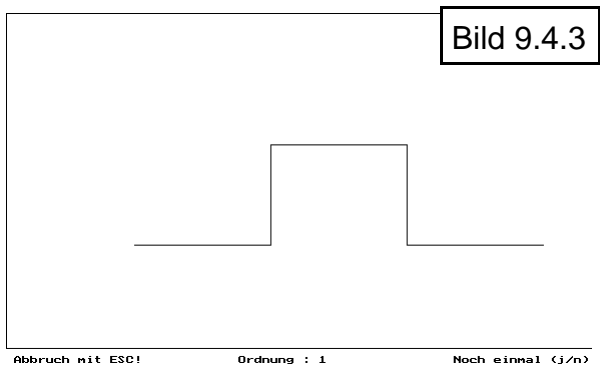


9.4.2.2 Schneeflockenkurve (Triadische Koch-Insel)

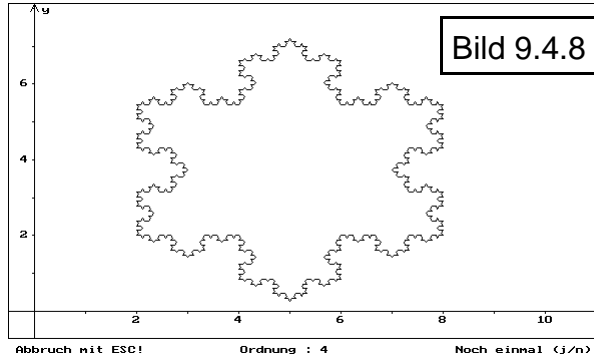
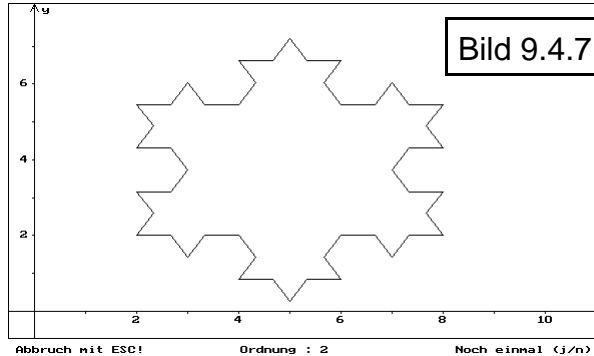
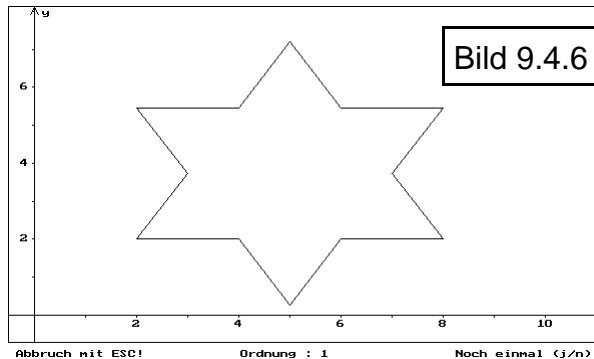
Der Initiator der Schneeflockenkurve ist ein gleichseitiges Dreieck. Der Generator der Kochkurve wird nun auf jede Seite des Dreiecks angewandt. Dadurch ergeben sich ästhetische Figuren, die an Kristallstrukturen erinnern. Sie wurde im 1904 von Koch erstmals und die Frage nach der entstehenden Grenzfigur gestellt. Da diese Kurve ein Fläche einschließen, nennt man sie auch Koch-Inseln. Der Programmaufruf muß dazu nur das Zeichnen der Koch-Kurve über jeder Dreiecksseite beinhalten.

Programmaufruf:

Weitere Möglichkeiten für Kochkurven:



```
Dritteln(Ordnung,Grundseite);
TurnRight(120);
Dritteln(Ordnung,Grundseite);
TurnRight(120);
Dritteln(Ordnung,Grundseite);
```



Weitere Aufgaben bestehen in der Verwendung anderer Generatoren oder in der Wahl eines anderen Initiators, z. B. einregelmäßiges Fünfeck. Interessant sind solche Generatoren, die sich nicht überschneiden oder berühren und so zu einer Überdeckung der Fläche führen (vgl. Peano-Kurven).

Hieraus wurde der Begriff der Dimension entwickelt (Hausdorff-Dimension aufgrund der Selbstähnlichkeit der Figur).

9.4.2.3 Pfeilspitzenkurve

Auf ein ganz anderes Ergebnis bekommt man, wenn man als Initiator wieder eine Strecke wählt und darüber die folgende Figur zeichnet (Bilder 9.4.9 ff.):

Manuelles Zeichnen auf rautierten Papier. Die neue Schwierigkeit besteht darin, daß die Figur einmal nach außen und dann wieder nach innen gezeichnet werden muß. Man führt deshalb neben dem Grad der Kurve und der Seitenlänge noch die Orientierung des neuen Linienzuges ein, z. B. +1 nach innen; -1 nach außen.

Die Prozedur für die Pfeilspitzenkurve lautet dann:

```

PROCEDURE pfeil(Grad, Orientierung
:integer; L : real);
BEGIN
  IF keypressed THEN IF readkey=ESC
                      THEN Abbruch:=true;
  IF Abbruch THEN exit;

  IF Grad>0 THEN BEGIN
    {gotoxy(5,5);
    write(orientierung);warten;}

    TurnLeft(60*Orientierung);
    pfeil(Grad-1,
        -Orientierung,L/2);
    TurnRight(60*Orientierung);
    pfeil(Grad-1,
        Orientierung,L/2);
    TurnRight(60*Orientierung);
    pfeil(Grad-1,
        -Orientierung,L/2);
    TurnLeft(60*Orientierung);

    END
  ELSE ForWD(L);
END;
    
```

Das Hauptprogramm enthält den Aufruf der Prozedur:

```

pfeil(Ordnung,Orientierung,
Grundseite);
    
```

Man wird erst das Ergebnis erzeugen lassen. Zur Ergänzung kann man noch das gleichseitige Dreieck mit Hilfe einer Prozedur Dreieck einzeichnen lassen. Interessant wird der Zusammenhang zu Sierpinski-Dreiecken, die im nächsten Abschnitt auf eine ganz andere Weise erzeugt werden.

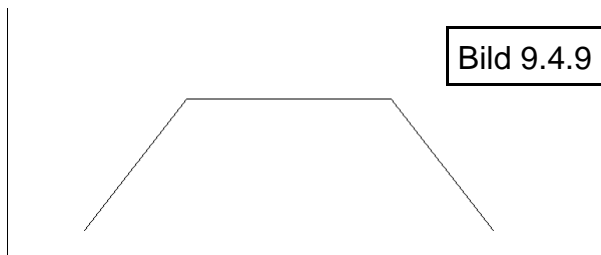


Bild 9.4.9

Abbruch mit ESC! Ordnung : 1 Noch einmal (j/n)

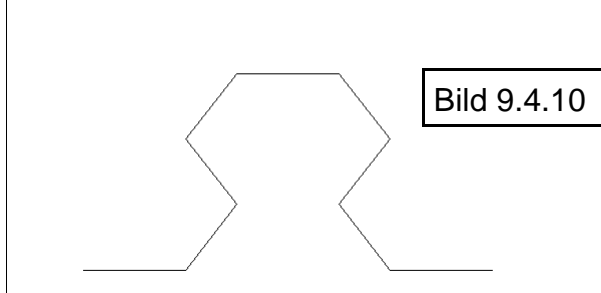


Bild 9.4.10

Abbruch mit ESC! Ordnung : 2 Noch einmal (j/n)

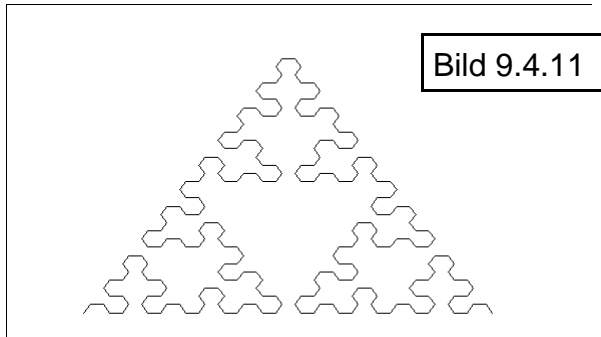


Bild 9.4.11

Abbruch mit ESC! Ordnung : 5 Noch einmal (j/n)

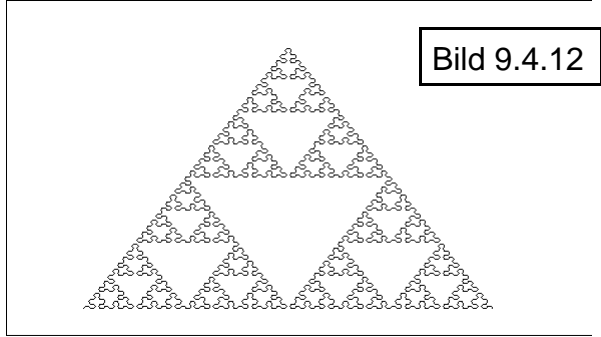


Bild 9.4.12

Abbruch mit ESC! Ordnung : 7 Noch einmal (j/n)

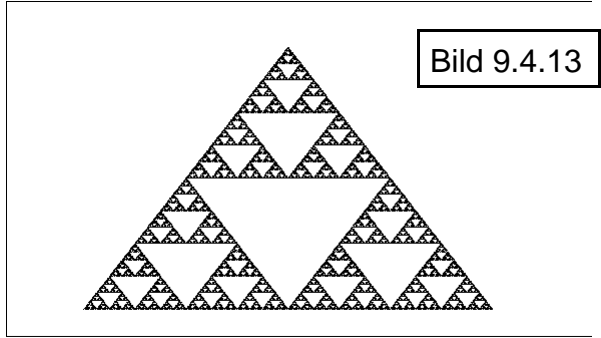


Bild 9.4.13

Abbruch mit ESC! Ordnung : 9 Noch einmal (j/n)

- Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 9 cm.
- Konstruktionsanweisung: Verbinde die Mittelpunkte der Seiten miteinander.
- Wiederhole dies für jedes neu entstandene Dreieck.

Hinweis: Das Mittendreieck soll keine Verbindungslinien zeigen.

Die entstehende Figur heißt Sierpinski-Dreieck.

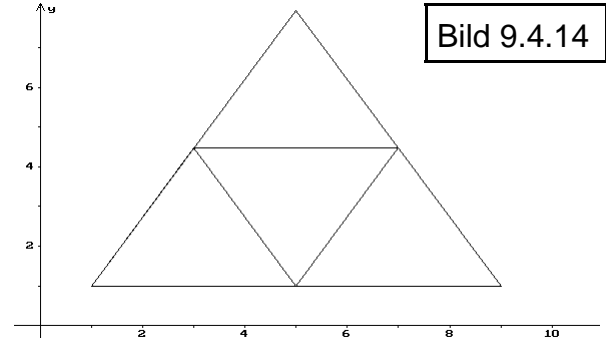


Bild 9.4.14

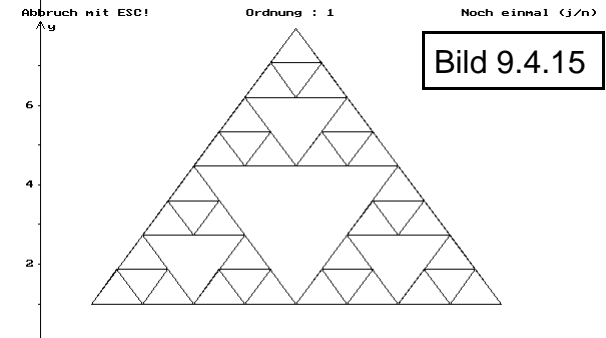


Bild 9.4.15

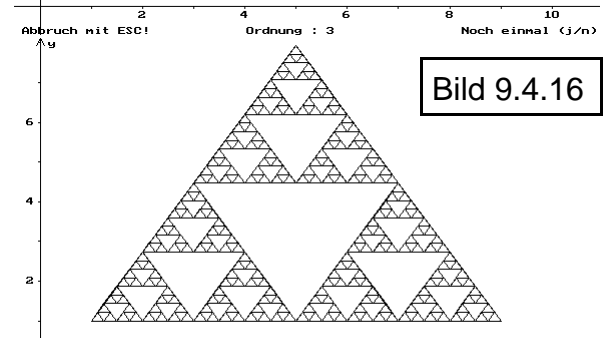
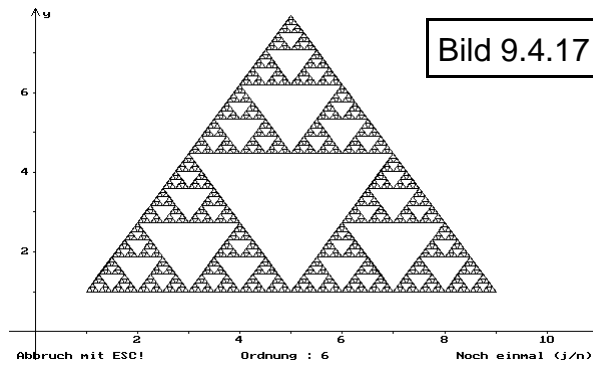


Bild 9.4.16

9.4.2.4 Sierpinski-Dreiecke

Es soll eine Figur nach folgenden Schritten erzeugt werden:



Entwurf eines Programmes mit Hilfe der Turtle-Graphik:

```

PROCEDURE Sierp(Grad:integer;
  L: real);
BEGIN
  IF keypressed THEN IF
    readkey=ESC
    THEN Abbruch:=true;
  IF Abbruch THEN exit;
  IF Grad>0 THEN BEGIN
    Dreieck(L);
    ForWd(L/2);
    TurnLeft(60);
    Dreieck(L/2);
    TurnRight(60);
    sierp(Grad-1,L/2);
    TurnLeft(120);
    ForWd(L/2);
    TurnRight(120);
    sierp(Grad-1,L/2);
    TurnRight(120);
    ForWd(L/2);
    TurnLeft(120);
    sierp(Grad-1,L/2);
  END;
END;

```

Der Aufruf der Prozedur im Hauptprogramm muß den Grad der Kurve und die Seitenlänge übergeben:

`sierp(Ordnung,Grundseite);`

Aufgaben:

- 1) Wie viele Dreiecke entstehen nach jedem Schritt?
- 2) Das Konstruktionsverfahren soll nicht auf die 'Außendreiecke', sondern auf das Dreieck in der Mitte angewandt werden. Wie

schaue die Figur nach vier Iterationsschritten aus? Welche Seitenlänge hat sie?

- 3) Anstelle eines Dreiecks als Startfigur kann man auch ein Quadrat nehmen. Das Konstruktionsverfahren lautet dann:

- Teile die Seiten in drei gleiche Abschnitte
- Zeichne in die neun entstehenden Randquadrate wieder ein Mittenquadrat

Die Konstruktion läßt sich leicht auf kariertem Papier durchführen.

9.4.3 Chaos - Spiel

Die Spielregeln:

Gegeben ist das gleichseitige Dreieck ABC. Man wählt einen beliebigen Startpunkt im Innern des Dreiecks. Durch Würfeln wird die Bewegung in Richtung auf eine der Ecken festgelegt. Den nächsten Punkt erhält man durch Halbieren der Strecke zwischen dem jetzigen Punkt und der durch Würfeln bestimmten Ecke. Sinnvoll erscheint z. B. bei Würfeln der Augenzahl 1, 2 Zeichen der Verbindungsstrecke zum Punkt A, für 3, 4 wählt man die zur Ecke B und für die Augenzahlen 5, 6 den Punkt C zur Bestimmung des Mittelpunktes.

Welche Figur ergibt sich, wenn man dieses Spiel lange genug durchführt?

Programm zur Simulation des Spiels

```

PROGRAM ChaosSpiel;
uses TPGraf; {G.Kühlewind,Gymnasium
             Berchtesgaden,06.06.90}

CONST
  zufall : real      = 0;
  x       : real      = 0.2;
  y       : real      = 0.1;
  jn      : Str80     = 'j';

Procedure Dreieck;
BEGIN
  ForWD(1);
  TurnLeft(116.561);
  ForWD(1.118);
  TurnLeft(126.869);
  ForWD(1.118);
  TurnLeft(116.561);
END;

```

```

BEGIN {des Hauptprogramms}
  InitGraph;
  DefCartWorld(-0.2, -0.1, 1.5,
              NOT centered);
  gotoxy(2,25); write('Abbruch
                    mit ESC!');
  REPEAT
    DefWindow(0, 1/24, 1, 1,
              BorderOn, clipOn);
    clrscr;
    ACHSEN('x','y');
    DefWindow(0, 1/24, 1, 1,
              BorderOn, clipOn);
    SetPosition(0,0);
    SetHeading(0);
    Dreieck;
  REPEAT
    zufall:=Random;
    GOTOXY(50,6);WRITE(zufall);

```

```

    if zufall > 0.6666666 then
      BEGIN
        x:=0.5*(x+0.5);
        y:=0.5*(y+1);
      END;
    if zufall < 0.3333333 then
      BEGIN
        x:=0.5*(x+1);
        y:=0.5*y;
      END;
    if (zufall >= 0.3333333) AND
       (zufall <= 0.6666666) THEN

```

```

      BEGIN
        x:=0.5*x;y:=0.5*y;
      END;
    Punkt(x,y);
  UNTIL KEYPRESSED;

  DefMaxWindow;
  REPEAT
    gotoxy(57,25);
    write('Noch einmal
(j/n)?');
    ReadStr(jn,1)
  UNTIL upcase(jn[1])
  IN ['J','N'];
  UNTIL upcase(jn[1])='N';
  closeGraph
END.

```

Für eine Simulation des Spiels auf dem Rechner muß man die Koordinaten der Eckpunkte festlegen und die Mittelpunkte der möglichen Strecken zu den Eckpunkten berechnen. Um das mathematische Problem einfach zu gestalten, wählt man $A(0|0)$, $B(1|0)$ und $C(0,5|1)$.

Zur Berechnung der Streckenmittelpunkte gelten folgende Beziehungen, wie einfache geometrische Überlegungen zeigen:

Mittelpunkt der Strecke $[PA]$:

$$x_{neu} = x_{alt}/2; y_{neu} = y_{alt}/2$$

Mittelpunkt der Strecke $[PB]$:

$$x_{neu} = x_{alt} + (1 - x_{alt})/2$$

$$= (x_{alt} + 1)/2$$

$$y_{neu} = y_{alt}/2$$

Mittelpunkt der Strecke $[PC]$:

$$x_{neu} = (x_{alt} + 1/2)/2;$$

$$y_{neu} = (y_{alt} + 1)/2$$

Der Programmkern erzeugt mit der Anweisung `RANDOM` Zufallszahlen `zufall` aus $[0;1]$ und ordnet je nach der Größe die Lage des neuen Punktes zu. Da das Koordinatensystem neu skaliert werden muß, ist hier das vollständige Programm abgedruckt.

```

PROCEDURE pfeil(Grad, Orientierung
:integer; L : real);
BEGIN
  IF keypressed THEN IF readkey=ESC
                      THEN Abbruch:=true;
  IF Abbruch THEN exit;

  IF Grad>0 THEN BEGIN
    {gotoxy(5,5);
    write(orientierung);warten;}

    TurnLeft(60*Orientierung);
    pfeil(Grad-1,
          -Orientierung,L/2);
    TurnRight(60*Orientierung);
    pfeil(Grad-1,
           Orientierung,L/2);
    TurnRight(60*Orientierung);
    pfeil(Grad-1,
           -Orientierung,L/2);
    TurnLeft(60*Orientierung);

  END
  ELSE ForWD(L);
END;

```

```

PROCEDURE pfeil(Grad, Orientierung
:integer; L : real);
BEGIN
  IF keypressed THEN IF readkey=ESC
                      THEN Abbruch:=true;
  IF Abbruch THEN exit;

  IF Grad>0 THEN BEGIN
    {gotoxy(5,5);
    write(orientierung);warten;}

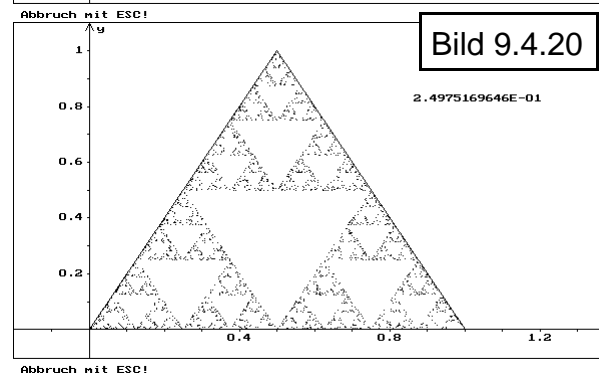
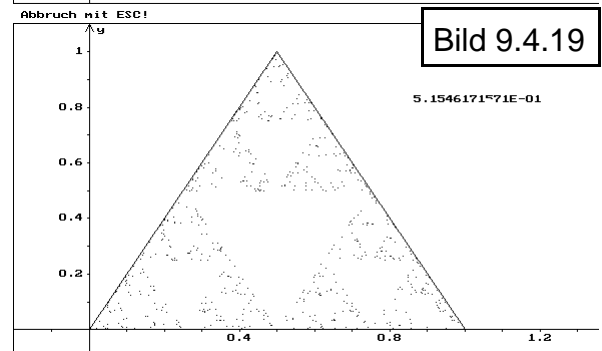
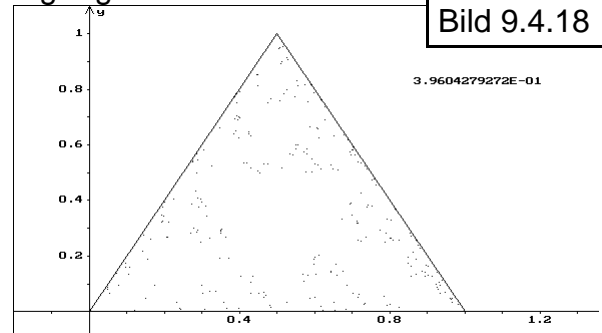
    TurnLeft(60*Orientierung);
    pfeil(Grad-1,
          -Orientierung,L/2);
    TurnRight(60*Orientierung);
    pfeil(Grad-1,
           Orientierung,L/2);
    TurnRight(60*Orientierung);
    pfeil(Grad-1,
           -Orientierung,L/2);
    TurnLeft(60*Orientierung);

  END
  ELSE ForWD(L);
END;

```

Die entstehende Grenzfigur ähnelt dem Sierpinski-Dreieck. Durch Einzeichnen des Randedreiecks kann dies noch verdeutlicht werden. Das Programm

wurde um eine Prozedur 'Dreieck' ergänzt, die das Dreieck ABC in das Bildschirmkoordinatensystem zeichnet. Mit Schülern wird man diese Prozedur erst einbauen und aufrufen, wenn sie eine Vorstellung von der entstehenden Figur gewonnen haben.



9.4.4 Bäume und Schneeflockenkurven

Eine neue Gruppe der fraktalen Kurven stellen die Bäume und Schneeflocken dar. Der tiefer gehende mathematische Zusammenhang liegt in der Verwandtschaft zu den Cantor-Mengen, die in der Schule nicht behandelt werden können. Es lohnt sich aber die Symmetrie der Figuren zu betrachten.

9.4.4.1 Bäume

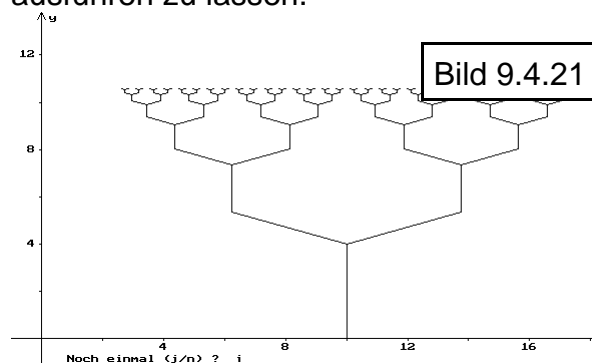
Mit diesen Strukturen kann dargestellt werden, wie man mit Hilfe mathematischer Methoden Formen beschreiben kann, die Blätter und Farne nachbilden. Eine Vorarbeit bilden die Baumstrukturen mit einem Ypsilon als Grundform. Die Prozedur in Turtle-Graphik enthält zusätzlich die Anweisung 'BACK', die eine Linie entgegen der Orientierung der Turtle zeichnet. Sie wird mit Ypsilon(Grad, Grundseite) aufgerufen.

```

PROCEDURE Ypsilon(Grad : integer;
  L : real);
BEGIN
  IF keypressed THEN IF
    readkey=ESC THEN
      Abbruch:=true;
  IF Abbruch THEN exit;
  IF Grad>0 THEN BEGIN
    ForWd(L);
    TurnRight(60); ForWd(L);
    TurnLeft (60);
    Ypsilon(Grad-1,L/2);
    TurnRight(60); Back(L);
    TurnLeft (2*60); ForWd(L);
    TurnRight(60);
    Ypsilon(Grad-1,L/2);
    TurnLeft (60); Back(L);
    TurnRight(60); Back(L)
  END;
END

```

Auch hier ist es empfehlenswert, vor dem Programmeinsatz die erzeugende Prozedur auf rauiertem Zeichenpapier ausführen zu lassen.



Aufgaben, die sich hier anschließen:

- 1) Welche Höhe erreicht dieser Y-Baum in Abhängigkeit vom Grad n ?
- 2) Welchen Einfluß haben die Winkel am Y auf die Baumhöhe?
- 3) Experimentieren mit anderen Grundfiguren.

9.4.4.2 Schneeflocken

Diese Figuren zeigen eine Drehsymmetrie mit einem festen Drehwinkel. Der Initiator ist wieder ein Stern. Der Generator zeichnet nun an das Ende jeder Strecke wieder einen verkleinerten Stern.

Die Programmumgebung ist die gleiche wie bei den Kochkurven, so daß dieses Programmgerüst wieder vollständig übernommen werden kann.

Prozedur zur Erzeugung der Schneeflocke:

```

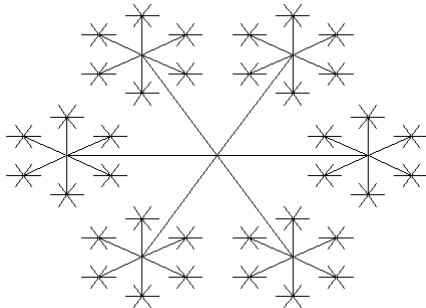
PROCEDURE Flocke(Grad : integer;
  L : real);
VAR i : integer;
BEGIN
  IF Grad>0 THEN BEGIN
    FOR i:=1 TO 6 DO BEGIN
      IF Abbruch THEN exit;
      ForWd(L);
      TurnLeft(30);
      Flocke(Grad-1, L/3);
      IF keypressed THEN
        IF readkey=ESC THEN
          Abbruch:=true;
      IF Abbruch THEN exit;
      TurnRight(30);
      Back(L);
      TurnLeft(60)
    END
  END
END;

```

Die gezählte Wiederholung erzeugt am Ende der Strecke den Stern, der um einen Winkel von 30° gegenüber der Streckenrichtung verdreht ist. Es ist empfehlenswert, diese Prozedur auf rauiertem Papier für die Grade 1 und 2 nachvollziehen zu lassen. Neue

Anweisung 'Back' bewirkt eine Drehung der Turtle um 180° und die Bewegung um die angegebene Streckenlänge, also eine Rückwärtsbewegung.

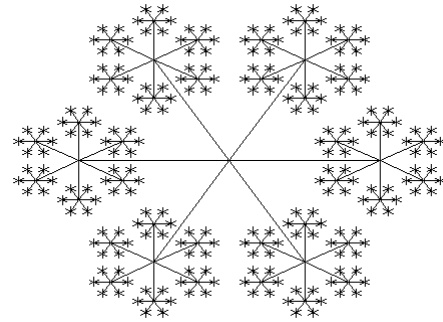
SCHNEEFLOCKE



Noch einmal (j/n) ? i

Bild 9.4.22

SCHNEEFLOCKE



Noch einmal (j/n) ? i

Bild 9.4.23

10 Anhang

10.1 Arbeitskreis

Der Arbeitskreis „Entwicklung von Unterrichtsmodellen zum Einsatz des Computers im Rahmen einer experimentellen Mathematik in Realschule und Gymnasium“ war von 1990 bis 1992 an der Zentralstelle für Computer im Unterricht tätig.

Seine Mitglieder und Autoren der Beiträge:

StD Hans Andraschko, Ignaz-Kögler-Gymnasium, Landsberg a. Lech

StR Rudolf Herdtweck, Staatl. Realschule, Traunstein

OStR Dr. Werner Lorbeer, Holbein-Gymnasium, Augsburg

StD Peter Rauschmayer, Luitpold-Gymnasium, München 22

OStR Gerd Ruhmann, Klenze-Gymnasium, München 70

StD Dietmar Steiner, Staatsinstitut für die Ausbildung der Lehrer an Realschulen, München 60

Leitung:

IR Detlev Kirmse, Zentralstelle für Computer im Unterricht, Augsburg.

10.2 Software

Tabellenkalkulationsprogramme:

Works (Microsoft), Excel (Microsoft), Quattro-Pro, Lotus 1-2-3 u. a.;
Softwarehandel

Vivitab (Mathelab) für MS-DOS und für GEM; Zentralstelle für Computer im Unterricht, Augsburg

derive; Softwarehandel

Programmiersprachen:

Turbo-Pascal 4.0/5.0, QBASIC, GWBASIC, COMAL; Softwarehandel

spezielle Unterrichtssoftware:

Treffer, Turboplot, Eureka; Softwarehandel

Konstr, Abbilden, Polyeder, Kugel; Zentralstelle für Computer im Unterricht, Augsburg

Cabri Géomètre; Softwarehandel

QRegel; P. Rauschmayer